UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS
UNIDADE ACADÊMICA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA
NÍVEL DOUTORADO

RAFAEL GODOLPHIM FEIJÓ

O INTUICIONISMO KANTIANO À LUZ DO LOGICISMO E DO COGNITIVISMO:
Uma defesa da intuição pura do espaço e do tempo

São Leopoldo
2017

Rafael Godolphim Feijó

O INTUICIONISMO KANTIANO À LUZ DO LOGICISMO E DO COGNITIVISMO:

Uma defesa da intuição pura do espaço e do tempo

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Filosofia, pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS
Área de concentração: Lógica

Orientadora: Prof.ª Sofia Inês Albornoz Stein *PhD*

São Leopoldo

2017

Rafael Godolphim Feijó

O INTUICIONISMO KANTIANO À LUZ DO LOGICISMO E DO COGNITIVISMO:
Uma defesa da intuição pura do espaço e do tempo

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Filosofia, pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS.

Aprovado em (31) (março) (2017)

BANCA EXAMINADORA

Dr.ª Sofia Inês Albornoz Stein (orientadora) - UNISINOS

Dr. Adriano Naves de Brito - UNISINOS

Dr. Carlos Adriano Ferraz - UFPel

Dr. Denis Coitinho Silveira - UNISINOS

Dr. Dirk Greimann - UFF

Dedicatória

À minha esposa Maíse, por seu apoio incondicional.

Agradecimentos

À minha orientadora Drª Sofia Inês Albornoz Stein, pela disposição em melhorar e aperfeiçoar meu trabalho de maneira fraterna e atenciosa.

Ao professor Carlos Adriano Ferraz, por sua amizade e suporte intelectual na elaboração do projeto de tese doutoral.

Aos professores Adriano Naves de Brito e Marco Antônio Oliveira de Azevedo, por suas críticas pontuais e extremamente fulcrais ao meu trabalho durante a banca de qualificação.

À minha família, pelo suporte constante.

Ao PPG em Filosofia da Unisinos, por me acolher e me permitir o aprendizado durante a vivência de sua estrutura docente.

À CAPES e à FAPERGS, por financiarem meus estudos.

Resumo

FEIJÓ, R. G. O intuicionismo kantiano à luz do logicismo e do cognitivismo: Uma defesa da intuição pura do espaço e do tempo. 2017. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Filosofia. Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo.

A filosofia kantiana da matemática é fundamentada sobre uma estrutura epistemológica intuicionista. As categorias do espaço e do tempo constituem as formas da sensibilidade, formas estas manifestadas por meio de uma intuição pura *a priori.* O presente trabalho busca realizar uma defesa razoável de tal intuição frente aos críticos contemporâneos, os quais propõem um programa logicista desprovido de estrutura epistêmica no que tange ao raciocínio matemático. Tais críticos afirmam que a aritmética não necessita da intuição pura do tempo para que as operações numéricas possam ser realizadas. Buscaremos demonstrar que a lógica quantificacional constitui um expediente meramente formalista que deixa de lado os problemas epistemológicos da cognição matemática e, por esse motivo, pode ambicionar desconsiderar a intuição pura kantiana. Portanto, buscaremos demonstrar que a intuição pura kantiana ainda pode lançar luz sobre a natureza dos cálculos da matemática.

Palavras-chave: Intuicionismo, Logicismo, Intuição Pura, Construtivismo, Aritmética, Geometria

Abstract

FEIJÓ, R. G. O intuicionismo kantiano à luz do logicismo e do cognitivismo: Uma defesa da intuição pura do espaço e do tempo. 2017. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Filosofia. Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo.

The Kantian philosophy of mathematics is based on an intuitionist epistemological structure. The categories of space and time are the forms of sensibility, these forms manifested through a pure intuition *a priori*. The present work seeks to make a reasonable defense of such intuition in the face of contemporary critics, who propose a logicist program devoid of epistemic structure regarding mathematical reasoning. Such critics claim that arithmetic does not need the pure intuition of time for numerical operations to be performed. We will try to demonstrate that the quantificational logic constitutes a merely formalistic expedient that leaves aside the epistemological problems of the mathematical cognition and, for this reason, it can ambition to disregard the pure Kantian intuition. Therefore, we shall try to demonstrate that pure Kantian intuition can still shed light on the nature of mathematical calculations.

Keywords: Intuitionism, Logicism, Pure Intuition, Constructivism, Arithmetic, Geometry

Lista de Figuras

SUMÁRIO

Introdução

O pressuposto para resolver o problema a ser abordado neste trabalho é a compreensão da intuição pura kantiana, mais especificamente, das formas puras *a priori* do *espaço* e do *tempo,* enquanto elementos *a priori* da cognição matemática. A filosofia kantiana da matemática é fundamentada sobre tais elementos, os quais, Kant apresenta na *KrV.* Ao analisarmos o conteúdo da filosofia da matemática kantiana, das críticas feitas a ela, buscaremos demonstrar que este debate não está esgotado e que a teoria kantiana ainda pode lançar algumas luzes sobre a filosofia da matemática.

Abordaremos o problema da natureza e origem dos cálculos matemáticos a partir das perspectivas do intuicionismo e do logicismo, sendo que este último se apresenta como um oponente do primeiro e, portanto, da filosofia kantiana da matemática. O logicismo de Frege e Russell afirma que, no tocante à aritmética, não é necessário nenhum tipo de intuição; que a lógica em si mesma é capaz de fornecer o aparato para o processo de cálculo. Veremos que lógica quantificacional – apesar de sua importante contribuição para os sistemas formais – não constitui em si uma ameaça ao intuicionismo kantiano, visto que o problema que Kant buscava resolver enquanto explicava a natureza dos cálculos matemáticos não era o da mera correção formal do pensamento e sim as condições de possibilidade epistêmicas, i.e., a questão de quais são as condições que fornecem objetividade para o sujeito cognoscente; condições que funcionem como raiz – universalmente compartilhada por seres racionais humanos – epistêmica e, assim, liguem a consciência subjetiva com o mundo fenomênico, bem como possibilitem a construção *a priori* de verdades matemáticas, alcançando assim uma experiência possível. Claro, isso se explica a partir do fato de considerar a matemática uma atividade relacionada à cognição e não apenas a um conjunto formal de relações entre números.

Analisaremos igualmente, com a finalidade de esclarecer a preocupação kantiana intuicionista em relação aos conteúdos matemáticos, o surgimento das geometrias não euclidianas, as quais fazem frente à geometria euclidiana em vista de afirmarem que a geometria não é necessariamente plana, e sim hiperbólica ou elíptica. Certamente podemos pensar o espaço de maneira não euclidiana, mas o que de fato percebemos por meio dos sentidos parece ser capturado com a utilização da geometria descrita por Euclides, ou seja, a nossa estrutura perceptiva seria euclidiana. Kant não estava preocupado com estados de coisas meramente possíveis, mas com estados de coisas reais que possam produzir conhecimento objetivamente válido para seres humanos.

Uma terceira e última objeção à filosofia da matemática kantiana é o surgimento de mecânicas e dinâmicas não newtonianas. O advento da física einsteiniana não é em si um problema para Kant, uma vez que nossa percepção cotidiana do mundo externo continua podendo ser explicada com as leis de Newton. Fenômenos que desafiam nossa percepção comum podem ocorrer em situações de experimentação científica ideal, contudo, novamente, tais fenômenos e suas leis não perfazem a capacidade cognitiva humana natural. Nesse contexto, precisamos lembrar que o próprio Kant não absolutizava a física newtoniana: enquanto Newton tinha o espaço e o tempo como categorias heterônomas, a filosofia kantiana opera tendo essas categorias como sendo outputs mentais e, portanto, não intrínsecos ao mundo externo. O conhecimento proposto pela teoria kantiana se dá justamente quando tais outputs são conjugados com os inputs oriundos do múltiplo externo captado pelos sentidos.

Por último, vincularei as ambições kantianas com novas perspectivas contemporâneas que explicam a capacidade matemática humana desde as ciências cognitivas.

Estamos, pois, buscando os fundamentos epistêmicos dos juízos matemáticos, tarefa esta que nos levará a lidar com a geometria e com a aritmética como objetos de pesquisa específicos dentro da grande área da matemática, tomada aqui sob o ponto de vista filosófico. Não é nosso objetivo debater questões de cunho metafísico, tais como: se a existência dos números é real e efetiva ou meramente abstrata e cognitiva. Nosso foco é a intuição pura - o espaço e o tempo enquanto formas puras *a priori* – que gera condições de possibilidade dos juízos matemáticos realizados por mentes humanas, as quais necessitam de algo a mais do que um expediente meramente lógico a fim de poder pensar relações do espaço externo e, a partir disso, realizar operações geométricas e aritméticas.

Utilizaremos um esquema estrutural bastante simples a fim de expormos nossa investigação. Primeiramente apresentaremos o fundacionalismo lógico sustentado e desenvolvido por Gottfried Wilhelm von Leibniz e a resposta kantiana a este sistema carente de critérios de justificação epistêmicos que sejam capazes de fornecer um quadro mais fidedigno da cognição humana. Após, apresentaremos o pensamento de Gottlob Frege e de Bertrand Russell, que se posicionam de maneira crítica frente ao pensamento de Kant, mais especificamente frente à categoria da *intuição pura* (*reine Anschauung*) como fundamento subjetivo da experiência matemática possível. Em um terceiro momento apresentaremos e analisaremos exemplos oriundos das geometrias não euclidianas e da física einsteiniana que poderiam – ainda que erroneamente - ser utilizados em objeções à teoria kantiana. Contudo, vale ressaltar que Kant estava preocupado com o mundo real, da experiência possível. E, por fim – estando de posse do quadro geral - mostraremos de forma mais pormenorizada como a visão kantiana pode explicar satisfatoriamente a geometria e a aritmética como hoje as entendemos enquanto participantes das ferramentas cognitivas humanas. Caso logremos êxito, concluiremos que a intuição pura – enquanto parte da estrutura mental – pode ser uma categoria importante para explicar nossas capacidades de cálculo matemático objetiva e universalmente válidos.

1. Leibniz e a problemática da lógica geral

Gottfried Wilhelm von Leibniz, em sua revisão da matemática cartesiana, buscou desenvolver um método analítico para o calculo matemático. Tal método possui o mérito de se fundar em uma base lógica, apesar de tal lógica apelar para princípios básicos que acabam por remeter – ainda que indiretamente – para um ser supremo e fundador de tudo o que pode ser conhecido. Em sua correspondência com Samuel Clarke, Leibniz afirma que:

> O grande fundamento da matemática é o princípio de contradição ou identidade, i.e., que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, de maneira que A é A e não pode ser não A. Esse princípio é tudo o que nós precisamos para demonstrar cada parte da aritmética e da geometria, i.e., para demonstrar todos os princípios matemáticos.[1]

Ao afirmar isso, Leibniz está pressupondo um realismo matemático, i.e., ele não está questionando a existência dos números ou a possibilidade de serem conhecidos ou construídos pela mente humana. Em seu programa fundacional, ele afirma a existência de Deus, o qual criou todas as coisas da melhor maneira possível e estabeleceu as leis do conhecimento. Acima vimos o *princípio de contradição* o qual – no caso dos números – poderíamos traduzir como: 1 é 1 e não pode não ser 1; 5 é cinco e não pode não ser 5.[2]

E, no caso de aplicarmos o cálculo matemático aos objetos da natureza contaríamos ainda com o *princípio de razão suficiente,* o qual Leibniz define como sendo aquele "em virtude do qual nós sustentamos que não pode haver fato real ou existente, nenhuma afirmação verdadeira, a menos que exista uma razão suficiente, o motivo pelo qual algo deva ser de um modo e não de outro, apesar de tais razões geralmente não poderem ser conhecidas por nós."[3] Ora, este princípio afirma o caráter

[1] LEIBNIZ C3, 1718, p. 15. "The great foundation of mathematics is the principle of contradiction, or identity, that is, that a proposition cannot be true and false at the same time; and that therefore A is A, and cannot be not A. This single principle is sufficient to demonstrate every part of arithmetic and geometry, that is, all mathematical principles."
[2] Cf. LEIBNIZ, Monadology, p. 235.
[3] LEIBNIZ, Monadology, §33. [...] in virtue of which we hold that there can be no fact real or existing, no statement true, unless there be a sufficient reason, why it should be so and not otherwise, although these reasons usually cannot be known by us.

necessário de algumas verdades da física, afirma que deve existir uma *razão suficiente* para as coisas serem de determinada maneira em detrimento de outra. A fim de compreendermos melhor tal princípio, vejamos novamente a correspondência a Clarke:

> Mas, conforme eu apontei na Teodiceia, o movimento da matemática para a filosofia natural [aqui = 'física'] requer outro princípio, a saber, o princípio da necessidade de uma razão suficiente, o qual afirma que, para qualquer que seja o caso, existe uma razão de porque algo é assim e não de outra maneira. Esse é o motivo de Arquimedes. Querendo mover-se da matemática para a filosofia natural – em seu livro sobre o equilíbrio – teve que utilizar um caso especial do grande princípio da razão suficiente. Suponha que você tenha uma balança perfeitamente simétrica e que você ponha pesos iguais nos dois lados. Nada irá se mover; e Arquimedes viu o porquê – isso se deve ao fato de nenhuma razão poder ser dada para que um lado desça ao invés de outro. Usando apenas um princípio – o de que precisa existir uma razão suficiente para as coisas serem como são e não de outra maneira – nós podemos demonstrar a existência de Deus e todo o resto da metafísica e da teologia natural.[4]

Vemos que o programa leibniziano atribui a Deus a razão de todas as coisas. Nessa perspectiva as verdades da matemática constituem verdades da razão e, portanto inatas, ao passo que as verdades da física seriam verdades de fato. Certamente seria um tanto injusto avaliarmos a filosofia leibniziana sem levarmos em conta o contexto em que o autor se encontrava. Pouco, ou mesmo nada, poderia ser dito ou pensado fora dos limites teológicos, de modo que a investigação filosófica permaneceu circunscrita aos princípios fundantes e inquestionáveis da existência de Deus e de seu papel criador do mundo. Em sua reflexão epistemológica, destacam-se as duas categorias fundamentais, os dois tipos básicos de verdades que – no seio do pensamento leibniziano - compõem o entendimento humano, a saber, *as verdades*

[4] LEIBNIZ C3, 1718, p. 15. "But in order to proceed from mathematics to natural philosophy, another principles requisite, as I have observed in my Theodicy: I mean, the principle of a sufficient reason, viz. that nothing happens without a reason why it should be so, rather than otherwise. And therefore Archimedes being to proceed from mathematics to natural philosophy, in his book *De Equilibrio*, was obliged to make use of a particular case of the great principle of a sufficient reason. He takes it for granted, that if there be a balance, in which every thing is alike on both sides, and if equal weights are hung on the two ends of that balance, the whole will beat rest. This because no reason can be given, why one side should weigh down, rather than the other. Now, bythat single principle, viz. that there ought to be a sufficient reason why things should be so, and not otherwise, one may demonstrate the being of a God, and all the other parts of metaphysics or natural theology."

de fato e as *verdades da razão.*[5] O *princípio da razão suficiente* é aquele que se aplica imediatamente ao primeiro tipo de verdades, i.e., verdades empíricas, as quais precisam ser constatadas *a posteriori.* Já o *princípio de contradição* aplica-se também às *verdades da razão,* as quais são imutáveis e, portanto, fundantes de todo o conhecimento e, assim, inclusive do conhecimento matemático. A negação daquelas não requer necessariamente a lógica, ao passo que a negação destas requer necessariamente a lógica a fim de ser válida em todos os mundos possíveis. Nos parágrafos 34 e 35 da *Monadologia,* veremos o autor afirmando claramente que:

> É assim que na Matemática Teoremas especulativos e Cânones práticos são reduzidos, através da análise, a Definições, Axiomas e Postulados [...] Em suma, existem ideias simples, das quais não pode ser dada nenhuma definição; existem também axiomas e postulados, em uma palavra, princípios primários, os quais não podem ser provados, e de fato não há nenhuma necessidade de prova. Tais princípios são proposições idênticas, das quais o oposto envolve uma contradição expressa[6].

Leibniz apresentou uma concepção de matemática que era – em termos kantianos - analítica, uma concepção que envolvia *verdades da razão*, ou seja, verdades constatadas aprioristicamente por meio da mera análise lógica dos conceitos, tendo-os como dados e, portanto, sem a necessidade de uma teoria epistemológica que se ocupasse em unir a consciência subjetiva aos dados externos, bem como, sem a necessidade de elementos mentais apriorísticos para fins de construção matemática. Os juízos da matemática - igualmente aos da lógica – seriam verdades da razão, i. e., tautológicos, juízos nos quais o predicado já está contido no sujeito, juízos que precisam apenas ser decompostos a fim de que seu valor de verdade seja demonstrado. A investigação matemática de Leibniz não se ocupa com questões epistemológicas propriamente ditas, mas sim, apenas com a ordenação do conhecimento estabelecido, ordenação esta proporcionada por uma estrutura racional

[5] Cf. LEIBNIZ, Monadology, §33. “There are also two kinds of truths, those of reasoning and those of fact. Truths of reasoning are necessary and their opposite is impossible: truths of fact are contingent and their opposite is possible. When a truth is necessary, its reason can be found by analysis, resolving it into more simple ideas and truths, until we come to those which are primary.”

[6] Id. §34. “It is thus that in Mathematics speculative Theorems and practical Canons are reduced by analysis to Definitions, Axioms and Postulates […] In short, there are simple ideas, of which no definition can be given; there are also axioms and postulates, in a word, primary principles, which cannot be proved, and indeed have no need of proof; and these are identical propositions, whose opposite involves an express contradiction.”

formal que garantiria o critério de identidade necessário para afirmações de juízos válidos.

Vale dizer que ambos, o *princípio de razão suficiente e* o *princípio de não contradição* - uma vez que ambos parecem carecer de um caráter estritamente científico - são afirmações normativas que não se ocupam com a especificação do conhecimento, mas sim, apenas estabelecem as molduras racionais que permitem afirmar que os eventos da física e da matemática são de uma maneira e não de outra.

Friedman afirma que:

> Para Leibniz e Wolff o espaço é ideal em vista das relações entre substâncias serem ideais: cada substância espelha internamente o universo inteiro devido ao próprio princípio interno dessa substância e o espaço é uma representação ideal da ordem de mônadas subjacentes expressas na harmonia pré-estabelecida.[7]

É nesse contexto que o princípio de contradição é requerido, i.e., como uma regra de diferenciação de um ordenamento ideal dado previamente por Deus. Assim, o "esquema do intelecto divino"[8] seria um "princípio universal de interação"[9] que garantiria a base ontológica expressa em cada mônada e a ser acessada internamente pelo intelecto humano.

> Para Kant, pelo contrário, as relações de interação entre substâncias não são, de modo algum, ideais: um princípio universal de interação mútua é uma realidade distinta além da mera existência de substâncias (exigindo uma ação divina distinta que vá além da criação da existência de substâncias [...]), e o princípio universal de interação mútua constitui o espaço. Neste contexto, chamar o espaço de fenômeno externo significa apenas que é derivado ou constituído pela realidade não-espacial subjacente das substâncias simples.[10]

Frente a tal concepção monadológica, que considera o espaço como uma substância, Kant apresenta sua concepção de intuição pura, a qual faz referência à

[7] FRIEDMAN, 1992, p. 7. "[...] For Leibniz and Wolff space is ideal because relations between substances are ideal: each substance mirrors the entire universe internally due to its own inner principle, and space is an ideal representation of the underlying order of monads expressed in the pre-established harmony."

[8] KANT, Prop XIII: 412-414). *Apud:* FRIEDMAN, 1992, p. 7. "[…] schema of the divine intellect […]"

[9] Op. Cit. p. 7. "[…] universal principle of interaction […]."

[10] Id. p. 8. "For Kant, by contrast, relations of interaction between substances are in no way ideal: a universal principle of mutual interaction is a distinct reality over and above the mere existence of substances (requiring a distinguishable divine action going beyond the creation of the existence of substances […]*),* and the universal principle of mutual interaction constitutes space. In this context calling space an external phenomenon means only that it is *derivative* from or constituted by the underlying non-spatial reality of simple substances."

mente humana enquanto detentora de propriedades cognitivas que se aplicam ao mundo fenomênico, e este mundo é assim denominado em vista de ser o múltiplo externo que podemos conhecer - dada nossa constituição - e não por ser derivado das substâncias.

Conforme, o argumento leibniziano – em virtude de sua natureza lógica apriorística e verdadeira segundo o *princípio de contradição* – as proposições matemáticas seriam válidas e não necessitariam de qualquer recurso comprobatório alheio à análise, à decomposição e à identidade. Desta forma, podemos afirmar que a filosofia leibniziana da matemática se encaixa nos parâmetros comumente designados como: fundacionalistas, logicistas e analíticos. Ora, ao pretender que as verdades matemáticas sejam absolutas – e que devam ser acessadas por meio de um mero princípio de identidade, o qual, por sua vez, seria como que um caminho seguro para tais verdades – Leibniz acaba por delinear a problemática que virá a ser o centro do pensamento kantiano no que tange à epistemologia e à matemática.

1.1 A filosofia da matemática de Kant e a crítica à lógica geral

O programa kantiano – inserido no coração do projeto iluminista – visava fornecer uma nova fundamentação para a filosofia, uma que escapasse ao fundacionalismo metafísico e dogmático de Leibniz e Wolff e permitisse o ancoramento do conhecimento – inclusive o matemático – por meio de um papel ativo da mente, papel este que não pode recorrer a nenhum expediente heterônomo e absolutamente extrínseco como, por exemplo, uma realidade metafísica última que pudesse servir como fundamento da verdade. No caso específico da matemática Kant apresenta a necessidade de utilizarmos a *intuição pura.*

Assim, Kant apresenta sua filosofia transcendental de forma que o agente seja dotado de disposições cognitivas (espaço e tempo enquanto formas da intuição pura, bem como, dos conceitos puros do entendimento) as quais lhe permitem processar os dados da experiência sem que seja afirmada a realidade última dos dados fornecidos pelos sentidos. Tais dados constituem *inputs,* os quais fornecem conteúdo para as disposições*.* Nessa perspectiva, a experiência passa a ser restringida à esfera fenomênica - o múltiplo advindo dos sentidos - e pelas disposições da intuição pura.[11]

Henry Alisson afirma que a diferença entre a lógica geral de Leibniz e a lógica transcendental de Kant consiste no fato de Kant estabelecer uma *condição epistêmica,* i.e., condições que o conhecimento humano possui para processar os outputs e estabelecer a realidade objetiva desse processamento. Vejamos:

> [...] deve ser suficiente caracterizar uma condição epistêmica simplesmente como aquela que é necessária para a representação de um objeto ou de um estado de coisas objetivo. Como tal, também poderia ser chamado de 'condição objetivante'; pois é em virtude de tais condições que nossas representações se relacionam com objetos ou, como Kant gosta de dizer, possuem 'realidade objetiva'. Nesse aspecto, as condições epistêmicas devem ser distinguidas do que Kant denomina 'condições lógicas do pensamento', por exemplo, do princípio da contradição. O último serve como uma regra de pensamento consistente, mas não para a representação de objetos. Assim, não é uma condição epistêmica no sentido em que essa noção é tomada aqui. Grosso modo, a distinção entre condições lógicas e epistêmicas reflete a própria distinção de Kant entre a lógica geral e a lógica transcendental.[12]

Ora, a condição epistêmica nada mais é do que "os *conceitos puros do entendimento"*[13] e "*as formas da sensibilidade humana"*[14] – espaço e tempo – enquanto disposições da razão humana. Nessa perspectiva, Alisson afirma que a

[11]Cf. *KrV* A 258/ B313. "When, therefore, we say that the senses represent objects as they appear, and the understanding objects as they are, the latter statement is to be taken, not in the transcendental, but in the merely empirical meaning of the terms, namely as meaning that the objects must be represented as objects of experience, that is, as appearances in thoroughgoing interconnection with one another, and not as they may be apart from their relation to possible experience (and consequently to any senses), as objects of the pure understanding. Such objects of pure understanding will always remain unknown to us; we can never even know whether such a transcendental or exceptional I knowledge is possible under any conditions - at least not if it is to be the same kind of knowledge as that which stands under our ordinary categories. Understanding and sensibility, with us, can determine objects only when they are employed in conjunction. When we separate them, we have intuitions without concepts, or concepts without intuitions in both cases, representations which we are not in a position to apply to any determinate object."
[12] ALISSON, 1983, p. 10. "[...] it must suffice to characterize an epistemic condition simply as one that is necessary for the representation of an object or an objective state of affairs. As such, it could also be called an 'objectivating condition'; for it is in virtue of such conditions that our representations relate to objects or, as Kant likes to put it, possess 'objective reality'. In this respect epistemic conditions are to be distinguished from what Kant terms 'logical conditions of thought,' for example, the principle of contradiction. The latter serves as a rule of consistent thinking, but not for the representation of objects. Thus it is not an epistemic condition in the sense in which this notion is taken here. Roughly speaking, the distinction between logical and epistemic conditions reflects Kant's own distinction between general and transcendental logic."
[13] Ibid. "[...] the pure concepts of understanding [...]."
[14] Ibid. "[...] the forms of human sensibility [...]."

condição epistêmica é uma *condição objetivante*, uma vez que estabelece as condições de possibilidade do conhecimento propriamente dito – do múltiplo advindo dos sentidos – e, logo, da objetividade e validade universal e necessária da lógica transcendental. Lógica esta que se diferencia drasticamente da lógica geral enquanto mera regra do pensamento. E, portanto, o elemento *a priori* apresentado por Kant possui a função de proporcionar a validade epistêmica do conhecimento humano.

Norman Kemp Smith esclarece a natureza do '*a priori* 'apresentado por Kant, salientando que:

> [...] os fatores *a priori* são puramente relacionais. Eles não possuem conteúdo inerente a partir do qual possam ser obtidas pistas sobre o supra- sensível. Sua única função é servir para a interpretação de conteúdos fornecidos de outra maneira. [...] O *a priori*, então, é puramente relacional, sem conteúdo inerente; é sintético e, portanto, incapaz de prova independente ou metafísica; é relativo a uma experiência que só é capaz de produzir aparências. O a *priori* é tão estritamente factual quanto a experiência que ele condiciona.[15]

Os conceitos puros do entendimento e a intuição pura do espaço e do tempo, conforme Kemp Smith são meramente *relacionais,* i.e., são elementos mentais que se apresentam na ocasião da experiência, de maneira sintética e relativas a uma experiência fenomenologicamente delimitada. Não podem ser provadas e são – em si mesmas - desprovidas de conteúdo. A intuição pura é o que possibilita a universalidade e a necessidade dos juízos sintéticos *a priori* – inclusive os juízos sintéticos *a priori* da matemática – e, por esse motivo, o elemento *a priori* "não é dado pelos sentidos, mas é imposto pela mente; ou, em termos menos ambíguos, não faz parte da matéria da experiência, mas constitui sua forma."[16]

Na *Kritik der Reinem Vernunft* foi apresentada a ideia de *intuição pura* como sendo a base da capacidade matemática do pensamento humano. Tal intuição é apresentada como uma capacidade inata (inatismo de faculdades) da cognição

[15]SMITH, 1918, p. xlii. "[...] the a priori factors are purely relational. They have no inherent content from which clues bearing on the supersensible can be obtained. Their sole function is to serve in the interpretation of contents otherwise supplied. [ ] The a priori, then, is merely relational, without inherent content; it is synthetic, and therefore incapable of independent or metaphysical proof; it is relative to an experience which is only capable of yielding appearances. The a priori is as strictly factual as the experience which it conditions."
[16] Id. p. xl. "[...] is not given in sense but is imposed by the mind; or in other less ambiguous terms, is not part of the matter of experience but constitutes its form [...]."

humana. O espaço relaciona-se diretamente com as operações geométricas e o tempo com as operações aritméticas.[17]

Kant, apesar de classificar de modo semelhante a Leibniz os juízos nos quais o predicado não expande o conhecimento de *analítico,* discorda quanto à afirmação de os juízos da matemática pertencerem a essa classe. Na introdução da *KrV,* os *juízos analíticos* e *sintéticos* são apresentados como sendo, de certa maneira, equivalentes às ideias leibnizianas de *verdades de fato* e *verdades da razão.*[18] Contudo, a *KrV* traz à tona uma nova categoria de juízos, a saber, os *juízos sintéticos a priori,* os quais se valem da *intuição pura* como critério de correção.[19] Tais juízos seriam aqueles capazes de acrescentar aprioristicamente uma predicação ao sujeito, i.e., de expandir nosso conhecimento de maneira *apodítica* – universal e necessária.

Kant está preocupado – e ocupado – com a possibilidade real do conhecimento que possua conteúdo real e não apenas com a possibilidade lógica, de modo que propõe a conjugação da intuição pura e dos conceitos puros do

[17] Cf. *KrV,* A300/B356. "The term 'principle' is ambiguous, and commonly signifies any knowledge which can be used as a principle, although in itself, and as regards its proper origin, it is no principle. Every universal proposition, even one derived from experience, through induction, can serve as major premiss in a syllogism; but it is not therefore itself a principle. The mathematical axioms (e.g. that there can only be one straight line between two points) are instances of universal a priori knowledge, and are therefore rightly called principles, relatively to the cases which can be subsumed under them. But I cannot therefore say that I apprehend this property of straight lines in general and in itself, from principles; I apprehend it only in pure intuition."

[18] Cf. *KrV,* A6/B10. "In all judgments in which the relation of a subject to the predicate is thought (I take into consideration affirmative judgments only, the subsequent application to negative judgments being easily made), this relation is possible in two different ways. Either the predicate B belongs to the subject A, as something which is (covertly) contained in this concept A; or B lies outside the concept A, although it does indeed stand in connection with it. In the one case I entitle the judgment analytic, in the other synthetic. Analytic judgments (affirmative) are therefore those in which the connection of the predicate with the subject is thought through identity; those in which this connection is thought without identity should be entitled synthetic. The former, as adding nothing through the predicate to the concept of the subject, but merely breaking it up into those constituent concepts that have all along been thought in it, although confusedly, can also be entitled explicative. The latter, on the other hand, add to the concept of the subject a predicate which has not been in any wise thought in it, and which no analysis could possibly extract from it; and they may therefore be entitled ampliative. If I say, for instance, 'All bodies are extended', this is an analytic judgment. For I do not require to go beyond the concept which I connect with 'body' in order to find extension as bound up with it. To meet with this predicate, I have merely to analyse the concept, that is, to become conscious to myself of the manifold which I always think in that concept. The judgment is therefore analytic. But when I say, 'All bodies are heavy', the predicate is something quite different from anything that I think in the mere concept of body in general; and the addition of such a predicate therefore yields a synthetic judgment."

[19] Eberhard manifestou-se negativamente quando do surgimento da filosofia crítica kantiana, afirmando que Leibniz já havia proposto uma crítica à razão e que, portanto, o projeto kantiano de justificação - dos juízos sintéticos a priori – a partir da intuição pura seria desnecessário, uma vez que, conforme Eberhard, "se pode perfeitamente ampliar o conhecimento e enriquecê-lo com novas verdades sem inquirir se estamos lidando eventualmente com conceitos vazios, aos quais não haja objetos correspondentes [...]". (Kant, 1975, p. 23). Assim, contemporaneamente a Kant, Eberhard já defendia a possibilidade de os juízos sintéticos a priori prescindirem da *Sensibilidade*.

entendimento como condição necessária para um conhecimento teórico que se pretenda efetivamente válido e não apenas válido no âmbito lógico.

Logo, Kant não considera que os juízos da matemática sejam *verdades de fato*, i. e., verdades fundacionais absolutas e extrínsecas à razão subjetiva, verdades as quais possam ser expressas de maneira analítica , bem como, não as considera juízos que possam ser demonstrados unicamente por meio da constatação empírica, expressos em juízos sintéticos *a posteriori.* Kant considera os juízos matemáticos como fundados sobre a intuição - ainda que pura - intuição esta que permitirá a existência dos juízos sintéticos *a priori* da matemática. Logo, a fim de se contrapor ao *inatismo* leibniziano - dogmático e fundacionalista – bem como, a sua consequência analítica – tautológica e solipsista – apresenta o programa do idealismo transcendental com sua concepção de *juízos sintéticos a priori*:

> A filosofia de Leibniz e de Wolff indicou uma perspectiva totalmente errada a todas as investigações acerca da natureza e origem dos nossos conhecimentos, considerando apenas puramente lógica a distinção entre o sensível e o intelectual, porquanto essa diferença é, manifestamente, transcendental e não se refere tão-só à sua forma clara ou obscura, mas à origem e conteúdo desses conhecimentos. Assim, pela sensibilidade, não conhecemos apenas confusamente as coisas em si, porque não as conhecemos mesmo de modo algum; e se abstrairmos da nossa constituição subjetiva, não encontraremos nem poderemos encontrar em nenhuma parte o objeto representado com as qualidades que lhe conferiu a intuição sensível, porquanto é essa mesma constituição subjetiva que determina a forma do objeto enquanto fenômeno.[20]

A intuição *a priori* constitui um ponto de ancoramento para o significado do conceito matemático, uma vez que o garante. Conforme Michael Friedman, no entanto, a intuição pura tomada em si mesma - com seus *esquemas -* não garante propriamente a realidade e o significado objetivo da representação, uma vez que isso seria papel das intuições empíricas – com suas *imagens.* Tal objetividade seria fruto

20 *KrV* A44/B61. “The philosophy of Leibniz and Wolff, in thus treating the difference between the sensible and the intelligible as merely logical, has given a completely wrong direction to all investigations into the nature and origin of our knowledge. This difference is quite evidently transcendental. It does not merely concern their [logical] form, as being either clear or confused. It concerns their origin and content. It is not that by our sensibility we cannot know the nature of things in themselves in any save a confused fashion; we do not apprehend them in any fashion whatsoever. If our subjective constitution be removed, the represented object, with the qualities which sensible intuition bestows upon it, is nowhere to be found, and cannot possibly be found. For it is this subjective constitution which determines its form as appearance.”

da síntese entre imagens e formas, entre conceitos e intuições, ou seja, do processo demonstrado na *dedução transcendental.*[21] Temos, nesse contexto do sistema kantiano, a diferenciação entre a *forma da intuição* e a *intuição formal.* A primeira diz respeito ao múltiplo (*Mannigfaltigekeit*) oriundo da empiria, ao passo que a segunda possibilita unidade a este múltiplo.

A *intuição pura* está relacionada direta e necessariamente com os conceitos matemáticos, uma vez que ela se constitui em uma necessidade da razão (*Denknotwendigkeit*), diferenciando-se, assim, da necessidade que se segue da intuição empírica (*Anschauungsnothwen digkeit*).

Na passagem da *KrV*A55/B79, Kant afirma que:

> A lógica geral, conforme vimos, abstrai de todo conteúdo do conhecimento, i.e., de toda relação entre o conhecimento e o objeto. E considera apenas a forma lógica na relação entre um conhecimento e outro, ou seja, ela trata apenas da forma geral do pensamento.[22]

A *lógica geral* possui uma estrutura de conceitos sem intuições, é a articulação da *forma do pensamento em geral.* Tal lógica não pode atribuir verdade ou falsidade aos enunciados a que se propõe, uma vez que o *critério de não contradição* não é suficiente para um procedimento cognitivo que pretenda gerar um conhecimento válido em relação ao universo empírico. Tal critério nada tem a ver com os objetos que são dados à consciência subjetiva por meio dos sentidos. Em verdade, ele não tem relação com objeto ou conteúdo algum.

Na *lógica transcendental,* segundo Kant, "*nós não abstraímos de todo o conteúdo do conhecimento.*"[23] Vejamos o que diz Kant em A57/B81:

> Portanto, na expectativa de que possam existir conceitos que se relacionem *a priori* aos objetos, não como intuições puras ou sensíveis, mas somente enquanto atos do pensamento puro - os quais são, de fato, conceitos, mas cuja origem não é empírica nem estética, – formamos antecipadamente a ideia de uma ciência do entendimento puro e da razão, por meio da qual pensamos objetos completamente *a priori.* Tal ciência, que determinaria a origem, o escopo e a validade objetiva de tal conhecimento, teria de ser chamada *lógica*

[21] Cf. FRIEDMAN, 1990, p. 240.
[22]*KrV* A55/B79. "General logic, as we have shown, abstracts from all content of knowledge, that is, from all relation of knowledge to the object, and considers only the logical form in the relation of any knowledge to other knowledge; that is, it treats of the form of thought in general."
[23]*KrV* A55/B80. "But since, as the Transcendental Aesthetic has shown, there are pure as well as empirical intuitions, a distinction might likewise be drawn between pure and empirical thought of objects. In that case, we should have a logic in which we do not abstract from the entire content of knowledge."

> *transcendental*, uma vez que - diferentemente da lógica geral, a qual precisa lidar com o conhecimento puro e empírico da razão – ela diz respeito às leis do entendimento apenas na medida em que elas se relacionam aprioristicamente aos objetos.[24]

Nesta passagem é apresentada a estrutura da lógica transcendental, a possibilidade de construirmos *a priori* a forma geral dos objetos – objetos em geral que não são oriundos dos *inputs* dos sentidos. Diferentemente da *lógica geral*, a qual "abstrai de todo o conteúdo do conhecimento, isto é, de toda relação do conteúdo com o objeto,"[25] a lógica transcendental requer condições de possibilidade real que garantam a validade epistemológica da síntese entre conceitos e intuições. E é por isso que Kant aponta para as condições de possibilidade da lógica transcendental, a saber, "que os objetos aos quais ela se aplica precisam ser-nos dados na intuição,"[26] uma vez que, "na ausência de tal intuição faltariam objetos a todo o nosso conhecimento e este seria, por isso, totalmente vazio."[27] Começamos, assim, a nos aproximar da conexão existente entre o conceito de *intuição pura* e a fundamentação da matemática em Kant. Quanto a isso, Friedman afirma que:

> E, visto que existe claramente uma conexão íntima entre a noção kantiana de intuição pura e sua concepção acerca das ciências matemáticas, tal concepção é central para motivar a distinção entre lógica geral e transcendental. Não é surpreendente que a concepção de Kant acerca das ciências matemáticas dê a ele seu ponto de partida, lógico e histórico, em sua polêmica contra a metafísica dogmática da filosofia 'Leibniz-Wolff'. A prioridade lógica pode ser vista na seção V da Introdução da Crítica, onde as ciências matemáticas são evocadas a fim de demonstrar a existência do conhecimento sintético *a priori*, em oposição direta às conjecturas daqueles que 'pretendiam que as proposições fundamentais da ciência [da matemática] poderiam ser valoradas como verdadeiras por meio

[24] *KrV*A57/B81. "In the expectation, therefore, that there may perhaps be concepts which relate a priori to objects, not as pure or sensible intuitions, but solely as acts of pure thought that is, as concepts which are neither of empirical nor of aesthetic origin we form for ourselves by anticipation the idea of a science of the knowledge which belongs to pure understanding and reason, whereby we think objects entirely a priori. Such a science, which should determine the origin, the scope, and the objective validity of such knowledge, would have to be called transcendental logic, because, unlike general logic, which has to deal with both empirical and pure knowledge of reason, it concerns itself with the laws of understanding and of reason solely in so far as they relate a priori to objects."

[25] Cf. *KrV* A55/B79. "[…] In that case, we should have a logic in which we do not abstract from the entire content of knowledge."

[26] Cf. *KrV*A62/B87. "In a transcendental logic, we isolate the understanding as above, in the Transcendental Aesthetic, the sensibility separating out from our knowledge that part of thought which has its origin solely in the understanding. The employment of this pure knowledge depends upon the condition that objects to which it can be applied be given to us in intuition."

[27] Cf. *KrV*A62/B87. "[…] In the absence of intuition all our knowledge is without objects, and therefore remains entirely empty."

> daquele princípio [de contradição]' (B14). A prioridade histórica pode ser vista na Seção 1 da Primeira Reflexão da *Investigação sobre a clareza dos princípios da Teologia Natural e da Moral* (1763), na qual Wolff é criticado por tentar utilizar um método analítico em matemática.[28]

Na filosofia da matemática de Kant, encontraremos a noção de intuição pura como condição necessária para a fundamentação da matemática de modo que esta venha a conter uma possibilidade irrefutável, apriorística e universal, isto é, um modelo matemático que não é metafísico e tampouco dogmático, como também não é empirista nem ingênuo. Kant propõe um modelo epistemológico e matemático no qual a consciência cognoscente (transcendental), utiliza fatores mentais que geram sinteticamente um conhecimento objetivamente válido. Logo, precisamos ressaltar - juntamente com Friedman - que a intuição pura não é em si mesma o ponto de ancoramento da validade dos juízos matemáticos. Vejamos:

> […] o próprio Kant não emprega a intuição pura a fim de fornecer objetos e realidade objetiva para os conceitos da matemática – ou mesmo para qualquer conceito. Pelo contrário, objetos para qualquer conceito precisam ser encontrados na intuição empírica.[29]

Desta maneira, a intuição pura – tomada em si mesma - não fornece a realidade objetiva dos juízos matemáticos, mas apenas sua condição de possibilidade. É por meio dela – núcleo duro da filosofia transcendental – que a objetividade dos juízos matemáticos pode ser validada.[30] A passagem de A223/B271 utilizada por Friedman é deveras esclarecedora:

[28] FRIEDMAN, 1990, p. 214. "And, since there is of course an intimate connection between Kant's notion of pure intuition and his conception of the mathematical sciences, this latter conception is centrally involved in motivating the distinction between general and transcendental logic. This is not surprising, for it is Kant's conception of the mathematical sciences that provides him with his starting point, both logically and historically, in his polemic against the dogmatic metaphysics of the 'Leibniz-Wolffian' philosophy. The logical priority may be seen in section V of the Introduction to the Critique, where the mathematical sciences are appealed to in order to show the existence of synthetic a priori knowledge, in direct opposition to the conjectures of those who "supposed that the fundamental propositions of the science [of mathematics] can themselves be known to be true through that principle [of contradiction]" (B14). The historical priority may be seen in Section 1 of the First Reflection of the Enquiry Concerning the Clarity of the Principles of Natural Theology and Ethics (1763), where Wolff is criticized for attempting to use an analytic method in mathematics."

[29] FRIEDMAN, 1990, p. 217. – "[…] Kant himself does not employ pure intuition to provide objects and objective reality for the concepts of mathematics-or indeed for any concepts. On the contrary, objects for any concept whatsoever can only be found in empirical intuition." Ver também *KrV*B298.

[30] Cf. FRIEDMAN, 1990, p. 218.

> Parece, com efeito, que se poderia conhecer a possibilidade de um triângulo a partir do seu conceito tomado em si mesmo (que é certamente independente da experiência), pois podemos, de fato, dar-lhe um objeto totalmente *a priori*, isto é, construí-lo. Como esta construção, porém, seria apenas a forma de um objeto, o triângulo seria sempre um produto da imaginação e a possibilidade do objeto desse produto seria duvidosa, porquanto exigiria ainda outra coisa, a saber, que tal figura fosse pensada apenas nas condições em que se assentam todos os objetos da experiência. Ora, só porque o espaço é uma condição formal *a priori* de experiências externas e porque a síntese figurativa pela qual construímos na imaginação um triângulo é totalmente idêntica à que usamos na apreensão de um fenômeno para convertê-lo num conceito da experiência, só por isso se pode ligar a este conceito de triângulo a representação da possibilidade de uma coisa semelhante. De maneira similar, visto que os conceitos de grandezas contínuas - e até mesmo de grandezas em geral - são todos sintéticos, a possibilidade de tais grandezas nunca é clara a partir dos próprios conceitos, mas apenas quando estes são vistos enquanto condições formais da determinação dos objetos na experiência em geral; e onde, senão na experiência – por meio (unicamente) da qual nos são dados objetos – poderíamos buscar objetos correspondentes a tais conceitos?[31]

Quando Kant atribui o valor objetivo das representações não à intuição pura isoladamente, mas sim à síntese entre a recepção de dados externos com a intuição pura formal interna, i.e., à *síntese da apreensão na intuição,* ele sujeita toda e qualquer possibilidade cognoscente em relação ao mundo externo a uma faculdade apriorística que organiza nossas percepções. As formas puras do espaço e do tempo – dadas aprioristicamente - encontram seu substrato - exceto no caso da matemática - na experiência, i.e., no contato com o mundo empírico. Certamente, o sistema kantiano está baseado na ideia de que todos os membros funcionais da espécie humana

[31]*KrV*A223/B271. *Apud:* FRIEDMAN, 1990, p. 218. "It does, indeed, seem as if the possibility of a triangle could be known from its concept in and by itself (the concept is certainly independent of experience), for we can, as a matter of fact, give it an object completely *apriori* that is, can construct it. But since this is only the form of an object, it would remain a mere product of imagination, and the possibility of its object would still be doubtful. To determine its possibility, something more is required, namely, that such a figure be thought under no conditions save those upon which all objects of experience rest. That space is a formal a priori condition of outer experiences, that the formative synthesis through which we construct a triangle in imagination is precisely the same as that which we exercise in the apprehension of an appearance, in making for ourselves an empirical concept of it these are the considerations that alone enable us to connect the representation of the possibility of such a thing with the concept of it. Similarly, since the concepts of continuous magnitudes, indeed of magnitudes in general, are one and all synthetic, the possibility of such magnitudes is never clear from the concepts themselves, but only when they are viewed as formal conditions of the determination of objects in experience in general. And where, indeed, should we seek for objects corresponding to these concepts if not in experience, through which alone objects are given to us? […]." Cf. FRIEDMAN, 1990, p. 218.

possuem a intuição pura de tempo e espaço, de modo que nossas experiências podem ser traduzidas e compartilhadas.

A intuição pura é estabelecida como condição de possibilidade para a formulação de conceitos matemáticos – geométricos e aritméticos. Os conceitos geométricos seriam aqueles *construídos* na *intuição pura* enquanto espaço, por meio do esquema de grandeza *(quantorum/Quantum/quantum),* i.e., magnitudes específicas construídas ostensivamente - e, portanto, passíveis de serem mensuradas – e subjetivamente sintetizadas por meio do *espaço* enquanto condição de possibilidade do processo cognitivo unificante do múltiplo da experiência. Os conceitos aritméticos, por sua vez, seriam aqueles *construídos* por meio da noção de sucessão no *tempo* enquanto forma pura *a priori* da intuição. A aritmética ocupa-se com o "conceito genérico de coisa"[32] *(quantitatis/Quantität/quantity), -* simbolização de magnitudes específicas a serem determinadas "por meio de uma regra de enumeração"[33]*, – a* qual necessita do conceito formal de *tempo* a fim de calcular e determinar tais magnitudes.[34]

Frode Kjosavik reafirma o caráter essencial da intuição pura do espaço enquanto fundante da geometria.[35] O autor ressalta que tal intuição, na realidade, é "uma característica invariante de nossas sequências de intuições empíricas ou percepções"[36], uma vez que há uma relação *intrínseca* e, até mesmo, *isomórfica* entre a intuição pura de espaço e a empírica, relação esta que parece não existir entre o mero conceito lógico – como os propostos por Frege – e o espaço enquanto sentido externo.[37]

Assim, o critério de objetividade das proposições da ciência é que estas passem pela via da *Sensibilidade* (*Sinnlichkeit*), a qual contém as "representações a

[32] FRIEDMAN, 1990, p. 228. "[…] concept of a thing in general […]."
[33] KANT, *R.*140: *Ak*. 14, 57.6-7. "[…] by means of a rule of enumeration […]." *Apud:* FRIEDMAN, 1990, p. 226.
[34] Cf. *KrV*A142/B182. "The pure image of all magnitudes (quantorum) for 3 outer sense is space; that of all objects of the senses in general is time. But the pure schema of magnitude (quantitatis), as a concept of the understanding, is number, a representation which comprises the successive addition of homogeneous units. Number is therefore simply the unity of the synthesis of the manifold of a homogeneous intuition in general, a unity due to my generating time itself in the apprehension of the intuition."
[35] Cf. KJOSAVIK, 2009, p. 25.
[36] KJOSAVIK, 2009, p. 25. "[…] an invariant feature of our sequences of empirical intuitions or perceptions […]."
[37] Cf. KJOSAVIK, 2009, p 22.

priori, que constituem as condições mediante as quais os objetos nos são dados"[38], ainda que esta seja meramente formal, o que ocorre nas proposições de cunho matemático.

Ora, a *Sensibilidade* é manifesta-se por meio das intuições de *espaço* e *tempo,* os quais são intuições *apriorísticas* que servem de base para a formulação de juízos matemáticos necessários.[39] Desta forma, a partir da *intuição pura, o*s juízos sintéticos a priori conjugam conceitos e intuições, a fim de fornecer assertivas de cunho universal e necessário.[40] Enquanto Leibniz pretende que os juízos da matemática sejam de natureza puramente analítica, Kant – conforme afirmado anteriormente – pontua que tais juízos expandem nosso conhecimento, uma vez que introduzem novos dados, os quais não estão contidos no sujeito da proposição (conceito), visto que a matemática não é constituída por tautologias.[41] A filosofia transcendental apresenta os *juízos sintéticos a priori* como sendo uma resposta frente à disputa entre o logicismo e o subjetivismo, uma vez que proporcionam a expansão do conhecimento de maneira *apriorística* por meio da *intuição pura.* Risjord ressalta que Kant busca resolver a disputa entre os realistas e os antirrealistas, dado que aqueles defendiam a aplicabilidade da matemática a "entidades concretas"[42], enquanto estes buscavam apresentar as bases epistêmicas da matemática.[43]

[38]*KrV*B29/A15. "[…] a priori representations constituting the condition under which objects are given to us […]."
[39] Vale dizer que, a problematização de uma tal necessidade da razão não estava no programa de Kant, uma vez que não haveria necessidade de questioná-la. A geometria euclidiana constituía um dado fundamental para toda teorização possível. Contudo, o surgimento da geometria não euclidiana acarretou um profundo ceticismo quanto à necessidade e a exclusividade do modelo de Euclides, bem como, quanto à presença da intuição em qualquer geometria possível. Outrossim, cabe acrescentar que as geometrias não euclidianas, embora constituam – ao menos até certo ponto – um argumento válido contra o sistema kantiano, precisamos ter presente que Kant não deixaria de aceitar *conceitos vazios.* A questão é que tais conceitos seriam meramente formais, sendo, portanto, sem nenhuma relevância para o conhecimento. Tal irrelevância constitui, conforme citado anteriormente, a recusa de Kant quanto à mera lógica formal. Ele debruçava-se sobre a *possibilidade real* do conhecimento, uma vez que esta é a única que acrescenta dados, ou seja, é a única que amplia nosso conhecimento. Portanto, proposições válidas apenas conforme o critério do *princípio de contradição,* i.e., válidas no âmbito da lógica, não constituem o objeto do interesse do filósofo de Königsberg. Para um maior esclarecimento a respeito da questão concernente às geometrias não euclidianas, ver: COFFA, 1991, p. 43.
[40] Cf. *KrV,* A19/B13.
[41] Friedman ressalta que no caso da geometria a intuição pura do espaço é necessária para tornar possíveis os conceitos geométricos. Precisa-se das *formas dos objetos*, as quais são fornecidas pela filosofia transcendental. Ainda em relação à Aritmética, o autor diz que a noção de *interação sucessiva* dada pela intuição pura do tempo é uma condição de possibilidade do conceito de magnitude (*quantity/Quantität*). Para uma maior compreensão a respeito da intuição pura a priori dos conceitos de espaço e tempo, ver: FRIEDMAN, 1990, p. 235.
[42]RISJORD, 1990, p. 142. "[…] concrete entities."
[43] Cf. RISJORD, 1990, p. 142.

Segundo Risjord:

> […] Dar sentido à filosofia kantiana da matemática requer o arsenal epistemológico inteiro, bem como, sua ‘psicologia transcendental’. […] se utilizarmos as hipóteses epistemológicas e psicológicas de Kant, então a filosofia kantiana da matemática pode sobreviver às objeções comuns levantadas contra ela. […] Essa abrangente filosofia da matemática mantém a promessa de demonstrar de que maneira a matemática pode ser aplicada ao mundo empírico. [...] As verdades matemáticas se aplicam a todos os objetos empíricos em virtude do fato de tudo no mundo empírico poder ser representado pelos humanos. Se um objeto empírico é representado, ele está sujeito às condições fornecidas pelas formas da intuição. Quando definimos um conceito matemático, devemos ser capazes de construí-lo ostensivamente ou simbolicamente. A construção expõe características das formas da intuição. Tendo em vista que tais características são regras para a representação dos objetos no espaço e no tempo, o conceito será aplicável apenas àquelas situações nas quais as regras relevantes para a representação são invocadas. Portanto, temos garantia de que nosso conhecimento matemático será aplicado ao mundo empírico. Já que Kant era um idealista transcendental, ele não estava comprometido com os objetos matemáticos que preocupam alguns realistas matemáticos. Uma vez que temos uma construção, temos tudo o que precisamos para a valoração da verdade ou falsidade de nossos juízos matemáticos. Kant tem uma solução elegante para o problema da possibilidade de aplicação da matemática. Esse é um motivo convincente para explorarmos sua filosofia da matemática.[44]

A filosofia da matemática de Kant, ao não se deixar levar pelos extremos do realismo ou do antirrealismo, acabaria por encontrar na *intuição pura* aquilo que é necessário para uma fundamentação mental adequada da matemática, bem como,

[44] Ibid. “[…] making sense of Kant’s philosophy of mathematics requires the entire epistemological arsenal as well as his “transcendental psychology”. […] if we use Kant’s epistemology and psychological hypotheses, then Kant’s philosophy of mathematics can survive the common objections levelled against it. […] This comprehensive philosophy of mathematics holds the promise of showing how mathematics can be applied to the empirical world. […] Mathematical truths apply to all empirical objects in virtue of the fact that everything in the empirical world can be represented by humans. If an empirical object is represented, it is subject to the conditions provided by the forms of intuition. When we define a mathematical concept, we must be able to construct it ostensively or symbolically. The construction exhibits features of the forms of intuition. Since these features are rules for the representation of objects in space and time, the concept will be applicable in just those situations where the relevant rules for representation are invoked. Therefore, we are guaranteed that our mathematical knowledge will apply to the empirical world. Since Kant was a transcendental idealist, he is not committed to the mathematical objects which trouble some mathematical realists. Once we have a construction, we have all we need for the evaluation of the truth or falsity of our mathematical judgments. Kant has an elegant solution to the problem of how mathematics may be applied. It is a compelling reason to explore his philosophy of mathematics.”

empiricamente válida – por meio da síntese operada pela razão subjetiva entre as formas puras do espaço e do tempo e os dados da percepção, de modo que a estrutura geral da filosofia transcendental atuaria como um meio necessário ao processo de cálculo, ou melhor, como uma estrutura geral subjacente às operações geométricas e aritméticas.[45] Precisamos, pois, verificar de que modo essa estrutura epistemológica transcendental embasa a filosofia kantiana da matemática.

1.2 O papel da *Intuição Pura* na filosofia kantiana da matemática.

Retomemos brevemente a problemática na qual a *intuição pura* é mencionada por Kant. Enquanto a *intuição empírica* é composta pelos conteúdos da percepção sensível, a *intuição pura* é constituída por noções que jazem de antemão na consciência individual – não da maneira inatista apresentada por Descartes e Leibniz (*inatismo de conteúdo)* – mas, sim, por noções (espaço e tempo) presentes na razão em suas faculdades *(inatismo de faculdades).* Leibniz, como vimos, opera por meio daquilo que na *KrV* é chamado de *lógica geral* – lógica que se ocupa apenas com a mera validade lógica dos juízos, sem nenhuma problematização da possibilidade do conhecimento real – de modo que a matemática leibniziana desenvolve-se por meio da análise de conceitos desta lógica, sem nenhum recurso a qualquer critério de verdade que não esteja estritamente presente no próprio conceito.[46] Em relação a este ponto, Kant afirmaria que os juízos da matemática são os melhores exemplos de juízos sintéticos *a priori*, uma vez que, devido ao fato de não serem analíticos nem tampouco empiricamente verificáveis, para validá-los é necessário recorrer à *Sensibilidade,* como ponto de ancoramento. Esses juízos pertencem à esfera da *lógica transcendental*, pois conectam a razão subjetiva – a qual opera as inferências lógicas – às ideias que se apresentam como condição de possibilidade de toda experiência possível.[47]

[45] Cf. *KrV*A26/B42.
[46] Cf. *KrV*A796/B824. “I understand by a canon the sum-total of the a priori principles of the correct employment of certain faculties of knowledge. Thus, general logic, in its analytic portion, is a canon for understanding and reason in general; but only in regard to their form; it abstracts from all content. The transcendental analytic has similarly been shown to be the canon of the pure understanding; for understanding alone is capable of true synthetic modes of knowledge a priori.”
[47] Cf. *KrV*A2/B4. “Now it is easy to show that there actually are in human knowledge judgments which are necessary and in the strictest sense universal, and which are therefore pure a priori judgments. If an example from the sciences be desired, we have only to look to any of the propositions of mathematics; if we seek an example from the understanding in its quite ordinary employment, the

Conforme explicado anteriormente, Kant considera que a concepção leibniziana de juízos matemáticos é tautológica, i. e., redundante e circular. Eles seriam analíticos tais como o famoso exemplo da *KrV*, a saber, “todos os corpos são extensos”[48]. Kant, ao lidar com *juízos,* trabalha com uma relação entre *sujeito* e *predicado* (S é P), e os trata como representações. No caso do exemplo supracitado – “todos os corpos são extensos” – o conceito de *corpo* é representado como *extenso*, ou seja, o sujeito *corpo* está contido necessariamente no predicado *extenso.* Contudo, no caso dos *juízos sintéticos* – tanto *a priori* como *a posteriori* – o processo cognitivo ocorre de maneira diferente. À guisa de exemplo, podemos citar o *juízo sintético a posteriori: meu violão é preto*. Neste caso, não existe tautologia, uma vez que, o fato de a cor *preta* não fazer parte da representação *violão,* me obriga a recorrer à experiência, por meio do qual constato que tal instrumento é da cor preta.

Porém, o mesmo não ocorre com a afirmação *7+5=12*, a qual expressa um cálculo que não pode ser resolvido por meio de mera análise.[49] É neste ponto que Kant, a fim de resolver o problema da natureza da expressão numérica, apresenta a noção de construção.[50] Noção esta que implica a necessidade de que, no caso da proposição aritmética *7+5=12*, se realize uma soma, adicionando-se consecutivamente um ponto ao outro, até que se chegue ao resultado. Assim, dado que: (1) o sistema kantiano parte da ideia de que uma proposição não-analítica só pode constituir conhecimento se, e somente se, dela participarem conteúdos da – *Sensibilidade e;* (2) a proposição *7+5=12* ser *sintética (expandir nosso conhecimento) a priori (critérios não externos);* precisamos, então, representar, i.e., construir, o *7* e o *5* em uma *intuição pura*. Para tanto, representamos o número 7 por sete momentos

proposition, 'every alteration must have a cause', will serve our purpose. In the latter case, indeed, the very concept of a cause so manifestly contains the concept of a necessity of connection with an effect and of the strict universality of the rule, that the concept would be altogether lost if we attempted to derive it, as Hume has done, from a repeated association of that which happens with that which precedes, and from a custom of connecting representations, a custom originating in this repeated association, and constituting therefore a merely subjective necessity.”

[48] *KrV*A7/B11. “[...] ’All bodies are heavy’ [...].“

[49] Cf. *KrV*A10/B16. “We might, indeed, at first suppose that the proposition 7 + 5 = 12 is a merely analytic proposition, and follows by the principle of contradiction from the concept of a sum of 7 and 5. But if we look more closely we find that the concept of the sum of 7 and 5 contains nothing save the union of the two numbers into one, and in this no thought is being taken as to what that single number may be which combines both. The concept of 1 2 is by no means already thought in merely thinking this union of 7 and 5; and I may analyze my concept of such a possible sum as long as I please, still I shall never find the 12 in it.”

[50] Cf. *KrV*A714/B742. “For it is the concept of quantities only that allows of being constructed, that is, exhibited a priori in intuition; whereas qualities cannot be presented in any intuition that is not empirical.”

diferentes em uma sequência temporal, bem como, fazemos o mesmo com o 5. Tendo como regra o esquema *número,* chegaríamos ao resultado 12. Deste modo, reafirma-se o papel da intuição – das condições impostas por ela – como fator legitimador de todo e qualquer procedimento matemático, de toda e qualquer validação epistêmica real e não meramente formal.

Esclarecer a validade objetiva e não meramente lógica das proposições constitui aquilo que Robert Hanna denomina como *problema modal (Modal Problem)*[51], ao qual o autor se refere como sendo um problema referente à possibilidade de termos representações mentais *a priori* que possam ser endereçadas ao mundo real. Nossas representações possuem significado se puderem se referir corretamente a objetos existentes no mundo fenomênico. Hanna afirma que:

> Uma representação é uma *Vorstellung* – literalmente uma apresentação [putting] (*stellung*) de algo 'ante' (Vor) à mente consciente. [...] na carta a Hertz, Kant continua a dizer que ele está especialmente interessado na questão da possibilidade de uma representação mental *a priori* (isso é, não empírica ou não sensorial) poder se referir corretamente aos objetos reais. Ele quer saber 'como meu entendimento pode, por si mesmo, formar conceitos de coisas completamente *a priori*, conceitos com os quais as coisas devem necessariamente concordar' (*PC* Ak. x. 131). E a tarefa de encontrar uma resposta para tal questão determina em grande parte o foco e a trajetória do intenso trabalho de Kant na assim denominada década do silêncio até a publicação da *Crítica da Razão Pura.* Mas, a questão específica, a qual é eminentemente crucial, a respeito de representações mentais objetivas *a priori*, não pode ser respondida sem antes respondermos à questão relativa às representações mentais objetivas em geral; de fato, uma resposta à última questão determina em grande medida uma resposta à primeira. Assim, a questão absolutamente fundamental da nova abordagem revolucionária de Kant da filosofia, conforme esboçada em 1772 – a qual constitui a chave para o segredo da até então metafísica obscura – é a seguinte: como representações mentais objetivas são possíveis?[52]

[51]Cf. HANNA, 2001, p. 1. “By Kant’s own reckoning, the first *Critique* is an extended reflection on a single question: ‘Now the real problem of pure reason is contained in the question: how are synthetic a priori judgements possible?’ (*CPR* B19). Translated out of Kant’s jargon, this question raises a deep and broadly applicable philosophical difficulty: how can the same judgement be at once necessarily true, referred to the real or natural world in a substantive way, yet cognizable by creatures minded like us apart from all sense experience? For easy reference, I will call this ‘the Modal Problem’.”

[52] Id. p. 2. “A representation is a *Vorstellung*—literally, a ‘putting’ (*stellung*) of something ‘before’ (*Vor*) a conscious mind. Later in the letter to Herz, Kant goes on to say that he is especially concerned with the question of how an a priori (that is, non-empirical or non-sensory) mental representation can correctly refer to real objects. He wants to know ‘how my understanding may form for itself concepts of things completely a priori, with which concepts the things must necessarily agree’ (*PC* Ak. x. 131). And the task of finding an answer to that question largely determines both the focus and the trajectory of Kant’s intensive work in the so-called silent decade leading up to the publication of the *Critique of Pure Reason*.

O aparato de fundamentação epistemológico kantiano – i.e., seu mentalismo subjetivo, porém, não subjetivista – constitui uma metafísica que faz frente à chamada *metafísica obscura* – dogmática. Mas, de que maneira essa nova metafísica poderia gerar juízos universalmente compartilhados e apoditicamente verdadeiros – em relação à geometria e à aritmética – que possam ser ancorados na consciência individual de seres racionais dotados de uma mente que necessita construir o conhecimento a partir de representações?

A preocupação de Kant recai sobre a possibilidade de que seres racionais dotados de um aparato cognitivo intuitivo, i.e., cognitivamente limitados pelas capacidades sensoriais, serem capazes de gerar um conhecimento válido concernentemente ao múltiplo que lhes é apresentado pelos sentidos; bem como, sobre a possibilidade de possuírem a capacidade racional de dirigirem-se objetivamente ao mundo fenomênico por meio de uma faculdade anterior à própria experiência, faculdade esta que vem sendo mistificada e mal interpretada pela filosofia analítica ao longo dos últimos duzentos anos.

Apesar de o filósofo alemão não possuir nada além de um aparato conceitual filosófico baseado em concepções científicas atualmente tidas como obsoletas – tais como a física newtoniana – veremos que o filósofo pode estar certo quando apela para condições de possibilidade apriorísticas da cognição, bem como, quando afirma que a razão humana é capaz de produzir juízos apriorísticos que não são tautológicos, possuem validade apodítica e são universalmente compartilhados pela espécie humana.

Apesar de a filosofia transcendental ser revolucionária e marcar profundamente a história do pensamento humano, o caráter intuitivo e apriorístico da *intuição pura* não passaria imune diante dos críticos, muitos dos quais propunham uma espécie de retomada do programa logicista leibniziano. Tais críticos sustentam, em ultima instância, que a característica da analiticidade é capaz de fornecer

But the particular question about a priori necessary objective mental representations, crucial as it is, cannot be answered without first answering the question about objective mental representations in general; indeed, an answer to the latter question largely determines an answer to the former question. So the absolutely fundamental question of Kant’s revolutionary new approach to philosophy as adumbrated in 1772—which ‘constitutes the key to the whole secret of hitherto still obscure metaphysics’—is this: how are objective mental representations possible?”

informações (formais) que ultrapassam em muito a redundância que Kant atribui aos juízos analíticos.

2. As críticas do logicismo ao intuicionismo de Kant

Antes de ingressarmos nas críticas feitas pelo logicismo ao intuicionismo kantiano cumpre salientar que os propósitos dos logicistas eram, no final do século XIX e início do século XX, muito diferentes dos de Kant. O intuicionismo buscou definir as bases epistêmicas do conhecimento (matemático), ao passo que o logicismo buscava apenas reduzir a matemática à lógica justificando-a por meio de um critério de correção formal – e, portanto, ulterior – para a matemática.

Em relação ao intuicionismo Ernst Snapper afirma que:

> Conforme a filosofia intuicionista, a matemática deve ser definida como uma atividade mental e não como um conjunto de teoremas […] Ela é a atividade que consiste em executar, uma após a outra, as construções mentais que são indutivas e efetivas no sentido de que a construção intuicionista dos números naturais é indutiva e efetiva. O intuicionismo sustenta que os seres humanos são capazes de reconhecer se uma dada construção mental possui essas duas propriedades. Referir-nos-emos a uma construção mental que tenha essas duas propriedades como uma construção e, portanto, a definição intuicionista da matemática diz: *A matemática é a atividade mental que consiste em realizar construções uma após a outra.*[53]

O logicismo, diferentemente do intuicionismo supracitado, ao se ocupar apenas com as condições teoréticas formais do raciocínio matemático, deixa de lado todo e qualquer compromisso com a fundamentação propriamente epistêmica. Seus propósitos prevêem apenas uma base lógica objetiva e utilitária para a validação das operações numéricas. Ele – o logicismo – procura por um conjunto de axiomas e regras lógicas, a partir dos quais, conduz o ajuizamento matemático. Sobre isso, Snapper diz que:

[53] SNAPPER, 1979, p. 210. "[…] According to intuitionistic philosophy, mathematics should be defined as a mental activity and not as a set of theorems […] It is the activity which consists in carrying out, one after the other, those mental constructions which are inductive and effective in the sense in which the intuitionistic construction of the natural numbers is inductive and effective. Intuitionism maintains that human beings are able to recognize whether a given mental construction has these two properties. We shall refer to a mental construction which has these two properties as a construct and hence the intuitionistic definition of mathematics says: *Mathematics is the mental activity which consists in carrying out constructs one after the other."*

> Para que se possa compreender o logicismo, é muito importante que se veja claramente o que os logicistas queriam dizer com ‘lógica’. A razão disso é que, o que quer que seja que quiserem dizer, eles certamente queriam dizer mais do que lógica clássica. Hoje em dia, pode-se definir a lógica clássica como sendo constituída por todos aqueles teoremas que podem ser provados em linguagens de primeira ordem [...] sem a utilização de axiomas não lógicos. Estamos, portanto, restringindo-nos à lógica de primeira ordem e usando as regras de dedução e os axiomas lógicos dessa lógica. Um exemplo de tal teorema é a lei do terceiro excluído, a qual afirma que, se p é uma proposição, então p ou sua negação ¬p é verdadeiro; em outras palavras: a proposição p V ¬p é sempre verdadeira se V é o símbolo usual para o inclusivo ‘ou’.[54]

Conforme salienta o autor, o logicismo *restringe* a matemática aos axiomas e regras de dedução da lógica de primeira ordem, tomando tal lógica como sendo o universo limítrofe para o desenvolvimento da matemática.

Jose Alberto Coffa ressalta que dentre os logicistas havia, fundamentalmente, dois grupos. De um lado, situavam-se aqueles que questionavam “o papel da intuição pura no conhecimento”[55] e de outro, aqueles que defendiam a tese que afirmava que “tal papel seria nulo”[56] e, dessa forma, “questionavam a natureza dos conceitos geométricos”[57]. Nessa esteira, cumpre conferirmos as críticas feitas por Frege e Russell – ambos expoentes do logicismo – ao intuicionismo (kantiano). Autores estes que admitiam o papel da intuição pura do espaço no que diz respeito à geometria, mas que negavam explicitamente toda e qualquer participação da intuição pura do tempo na aritmética.

A problematização da noção de *intuição pura* começa no século XIX, com autores como Bernard Bolzano, o qual deu início ao movimento que posteriormente seria conhecido como *logicismo* (*logicism*)[58], movimento este que busca realizar a eliminação da categoria de *intuição pura* do processo de ajuizamento matemático e, consequentemente, realizar a defesa da possibilidade de *juízos analíticos*, os quais –

[54] Id. p. 208. “In order to understand logicism, it is very important to see clearly what the logicists meant by "logic." The reason is that, whatever they meant, they certainly meant more than classical logic. Nowadays, one can define classical logic as consisting of all those theorems which can be proven in first order languages (discussed below in the section on formalism) without the use of nonlogical axioms. We are hence restricting ourselves to first order logic and use the deduction rules and logical axioms of that logic. An example of such a theorem is the law of the excluded middle which says that, if p is a proposition, then either p or its negation ¬p is true; in other words, the proposition p V ¬p is always true where V is the usual symbol for the inclusive “or”.”
[55] COFFA, 1991, p. 41. “[…] the role of pure intuition in knowledge […].”
[56] Ibid. .”[...] that role was nil [...].”
[57] Ibid.”[...] questioned de nature of geometric concepts [...].”
[58] Cf. COFFA, 1991, p. 113.

mesmo não estando condicionados às imposições da intuição pura – seriam capazes de expandir nosso raciocínio, levando-o, aprioristicamente, a conclusões apodíticas. Bolzano, em relação à filosofia transcendental, sustenta que:

> Ela alega ter descoberto uma diferença distinta e característica entre os dois tipos fundamentais de conhecimento humano a priori, o filosófico e o matemático, a saber, que o conhecimento matemático precisa ser capaz de representar – i. e., construir adequadamente todos os seus conceitos em uma intuição pura, e, portanto, de demonstrar todos os seus teoremas. O conhecimento filosófico, por outro lado, sem qualquer toda intuição, precisa se satisfazer com meros conceitos discursivos. A essência da matemática seria, portanto, mais apropriadamente expressa por meio desta explanação: É uma ciência da razão por meio da construção de conceitos. [...] Quanto a mim, eu reconhecerei francamente que, até agora – tal como acontece de fato com tantas outras doutrinas da filosofia crítica – eu não fui capaz de aceitar a correção das asserções kantianas a respeito da intuição pura e da construção de conceitos por meio dela. Eu também acredito que certamente há uma contradição interna no conceito de uma intuição pura (i.e., a priori); e eu não consigo convencer-me de que é necessário construir o conceito de número no tempo, e que consequentemente a intuição do tempo é uma parte necessária da aritmética.[59]

Vemos que Bolzano manifesta sua discordância em relação à *intuição pura* enquanto base de ancoramento epistemológico para a construção de conceitos matemáticos. Bolzano afirma que a própria noção de *intuição* é algo em si mesmo contrário à noção de *puro* e de *a priori,* de forma que a matemática não necessitaria de tal recurso subjetivo – i. e. *psicológico* – para poder inferir suas operações. Tal concepção abriu caminho para as críticas logicistas empregadas por Frege e Russell. Contudo, Charles Parsons afirma que:

[59] BOLZANO, *Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, pp. 106-7. *Apud:* Coffa, 1991, p. 29. “It claims to have discovered a distinct and characteristic difference between the two fundamental types of human a priori knowledge, the philosophical and the mathematical, to wit, that mathematical knowledge must be able to represent - i.e., construct - adequately all of its concepts in a pure intuition, and thereby to demonstrate all of its theorems. Philosophical knowledge, on the other hand, lacking all intuition, must be satisfied with mere discursive concepts. The essence of mathematics would therefore be most properly expressed through this explanation: It is a science of reason through the construction of concepts. ... As for me, I will frankly acknowledge that until now - as with in fact so many other doctrines of the critical philosophy - I have been unable to accept the correctness of Kantian assertions concerning pure intuition and the construction of concepts through it. I also still believe that surely there lies an internal contradiction in the concept of a pure (i.e., a priori) intuition; and even less can I convince myself that it is necessary to construct the concept of number in time, and that consequently the intuition of time is an essential part of arithmetic.”

> Não consigo ver claramente o argumento de Bolzano contra a intuição a priori. Ele se queixa de que Kant não deu uma definição clara mesmo da distinção a priori-empírica e observa corretamente que a necessidade é propriamente uma propriedade dos juízos. Uma vez que a intuição não é um juízo, não pode ser necessário. Mas o próprio relato de Bolzano certamente não implica que uma intuição não tenha conteúdo que teria de ser enunciado em forma proposicional.[60]

No tocante à crítica ao caráter necessário da intuição pura, Bolzano não deixa claro seu posicionamento. Ele lida com a necessidade de maneira lógica – juízos – e desconsidera o conceito de necessidade apresentado pela dedução transcendental, o qual busca, em primeiro lugar, uma necessidade epistemológica. Para que se possa compreender o problema da necessidade - conforme a filosofia kantiana da matemática - é preciso que aja uma preocupação por parte do leitor em considerar a estrutura geral do projeto kantiano. E, visto que o programa logicista não opera sobre bases epistêmicas – input / output – não é possível a compreensão de necessidade apresentada por Kant. Os juízos sintéticos *a priori* da matemática são *a priori* em virtude de serem fruto de uma síntese que se dá a partir de capacidades cognitivas, i.e., seres humanos detentores de faculdades mentais universalmente compartilhadas calculam e geram resultados válidos e necessários na matemática pura e na matemática aplicada ao mundo externo. Tais resultados são necessários em virtude da estrutura mental intuitiva humana ser a mesma em todos os seres racionais humanos. Logo, tendo em vista que o conceito de 10 não contém em si mesmo o conceito de 63, o resultado da operação 10+63=73 é dado através da adição temporal do conceito 10 ao conceito 63. O resultado 73 é sintético a priori em vista de não podermos determiná-lo através de análise e sim apenas através de um *movimento* baseado no tempo. E é a intuição pura do tempo que garante objetividade e necessidade a tal operação.

[60] PARSONS, 2012, p. 92. "[...] I am not able to see clearly what Bolzano's argument against a priori intuition is. He complains that Kant has not given a clear definition even of the a priori– empirical distinction, and rightly observes that necessity is properly a property of judgments. Since an intuition is not a judgment, it cannot be necessary. But Bolzano's own account surely doesn't imply that an intuition does not have content that would have to be spelled out in propositional form."

2.1 A crítica de Frege

A crítica fregeana pode ser expressa resumidamente, na afirmação de que “parece não ser necessário saber nada sobre 1, 2, 3 e 4 além do que está contido nas definições”[61]. Conforme a concepção meramente formalista e não epistemológica de Frege, seria suficiente que possuíssemos apenas uma definição meramente formal que possa ser utilizada como um componente para a inferência numérica. Assim, a partir do momento no qual definirmos o conceito de unidade – ou melhor, daquilo que é o 1 – os outros números seriam dados através de uma operação somatória a partir dela. De fato, isso parece correto mesmo para Kant. O que Frege ignora é o processo cognitivo de construção executado pela razão, i.e., pela mente que concebe tal somatória. Nessa perspectiva, a tentativa de uma mera logicização do raciocínio aritmético nada mais é senão um retrocesso ao modelo leibniziano fundamentado sobre a lógica geral.[62] Frege certamente possui uma concepção de fundamentação da matemática, ele apresenta a lógica como base da matemática. Contudo, estamos buscando uma concepção de fundamentação que vá além da lógica (arbitrariamente introduzida) e encontre as bases cognitivas que antecedem a mesma lógica. O logicismo, tomado em si mesmo, não necessita da intuição pura. Mas, ao prescindir dessa intuição acaba por constituir uma teoria limitada sob o ponto de vista epistemológico.

Na seguinte passagem exposta por Frege na obra *Fundamentos da Aritmética,* o retorno à visão de Leibniz fica aparente:

> [...] Considerando-se também a oposição entre analítico e sintético, resultam quatro combinações, porém uma das quais, a saber, o analítico *a posteriori,* é impossível. Àqueles que se decidiram com Mill em favor do *a posteriori* não resta pois escolha, restando-nos ponderar ainda somente sobre as possibilidades sintético *a priori* e *analítico*. Kant decidiu-se em favor da primeira. Neste caso, não há praticamente outra alternativa senão apelar para uma intuição pura como fundamento último de conhecimento, embora aqui seja difícil dizer se ela é espacial ou temporal, ou de qualquer outra espécie[63].

[61] FREGE, The Foundations of Aritmethic § 6. “[...] It seems as though we need to know no more 1, 2, 3 and 4 than is contained in the definitions.“
[62] Cf. Id. §5.
[63] Id. § 12. “If we now bring in the other antithesis between analytic and synthetic, there result four possible combinations, of which however one, viz. analytic a posteriori can be eliminated. Those who have decided with MILL in favour of a posteriori have therefore no second choice, so that there remain only two possibilities for us still to examine, viz. synthetic a priori and analytic. KANT declares for the

O autor ressalta que Kant, ao apelar para os *juízos sintéticos a priori,* se viu obrigado a recorrer à *intuição pura* como ponto de ancoramento para tais juízos, mesmo que tal *intuição* pareça algo infundado, de difícil definição e de pouca utilidade – ao menos no que diz respeito à aritmética. Pois ao não recorrer à intuição sensível, ficaria impossibilitado de fundamentar os juízos sintéticos a priori da matemática. Vejamos:

> Kant define na Lógica (ed. Hartenstein, VIII, p. 88): 'A intuição é uma representação singular *(repraesentatio singularis),* o conceito uma representação geral *(repraesentatio per notas communes),* ou refletida *(repraesentatio discursiva)'.* Não se faz absolutamente menção à relação com a sensibilidade que é, contudo – introduzida na Estética Transcendental, e sem a qual a intuição não pode servir de princípio de conhecimento para os juízos sintéticos a *priori.* Na *Crítica da Razão Pura* (ed. Hartenstein, III, p. 55) diz-se: 'Por meio da sensibilidade, portanto, nos são dados objetos, e apenas ela nos fornece intuições'. O sentido de nossa palavra é assim mais amplo na Lógica que na Estética Transcendental. No sentido lógico poder-se-ia talvez chamar 100000 de intuição; pois conceito geral não é. Mas tomada neste sentido, a intuição não pode servir de fundamento para as leis aritméticas.[64]

Na passagem do §5 de *Os Fundamentos da Aritmética* é apresentado um posicionamento claro e pontualmente contrário à *intuição pura,* uma vez que tal intuição não seria capaz de fornecer a base epistêmica para números grandes, mas sim, apenas para operações simples, tais como *2 + 3 = 5*. De fato, a crítica fregeana deixa de lado a noção kantiana de construção numérica via mecânica pura, mecânica esta que serve como ponto intermediário entre o *símbolo* (número) e o *tempo* (enquanto forma da intuição pura). Frege ataca a perspectiva epistêmica da filosofia da matemática kantiana, uma vez que, ao propor um sistema lógico formal o autor

former. In that case, there is no alternative but to invoke a pure intuition as the ultimate ground of our knowledge of such judgements, hard though it is to say of this whether it is spatial or temporal, or whatever else it may be."

[64] Ibid. "[...] KANT in his Logic (ed. Hartenstein, vol. VIII, p. 88) defines it as follows: 'An intuition is an individual idea (REPRASENTATIO SINGULARIS), a concept is a general idea (REPRIESENTATIO PER NOTAS COMMUNES) or an idea of refiexion (REPRIESENTATIO DISCURSIVA).' Here there is absolutely no mention of any connexion with sensibility, which is, however, included in the notion of intuition in the Transcendental Aesthetic, and without which intuition cannot serve as the principle of our knowledge of synthetic a priori judgements. In the Critique of Pure Reason (ed. Hartenstein, vol. III, p. 5) we read: 'It is therefore through the medium of sensibility that objects are given to us and it alone provides us with intuitions.' It follows that the sense of the word 'intuition' is wider in the Logic than in the Transcendental Aesthetic. In the sense of the Logic, we might perhaps be able to call I oco,000 an intuition; for it is not a general concept anyhow. But an intuition in this sense cannot serve as the ground of our knowledge of the laws of arithmetic."

pode prescindir da fundamentação, ou melhor, do ancoramento epistemológico dos números e analisar a matemática apenas sob o prisma lógico.

De fato, a intuição pura analisada sob tal perspectiva – a lógica – soa como um expediente ousado e de difícil explicação, visto que não podemos defini-la apropriadamente, i.e., não podemos explicar sua própria natureza e origem. Além do mais, poderíamos aprender a pensar de maneira lógica – no sentido fregeano – e, assim, abandonar o aparato fundacional kantiano. Logo, a sinteticidade das operações aritméticas é posta em xeque. Frege afirma que:

> [...] Ora, é imediatamente evidente que 135664 + 37863 = 173527? Não! E Kant invocou precisamente este fato em favor da natureza sintética destas proposições. Entretanto, ele testemunha antes contra sua indemonstrabilidade; pois como, senão mediante uma demonstração, poderiam ser reconhecidas, visto não serem imediatamente evidentes? Também a expressão 'intuição' não parece adequada, visto que já dez dedos, em virtude da disposição de uns em relação aos outros, podem ocasionar as mais diversas intuições. Temos, pois, enquanto tal uma intuição de 135664 dedos ou pontos? Se a tivéssemos, e se tivéssemos uma de 37863 dedos e uma de 173527 dedos, a correção de nossa equação deveria evidenciar-se imediatamente, ao menos no que concerne a dedos, fosse ela indemonstrável; mas não é o que ocorre.[65]

Conforme podemos perceber, Kant é acusado de recorrer a expedientes ingênuos de confirmação da intuição – contagem de dedos ou de pontos. No entanto, em nenhum momento ele pretende que sua concepção de intuição pura seja baseada em pontos (ou dedos).

A aritmética kantiana não está, de modo algum, impedida de operar com números grandes e não há necessidade alguma de desenharmos 173527 pontos a fim de podermos construir tal magnitude com base na intuição pura do *tempo.* O

[65] Id. §5. "[…] Besides, is it really self-evident that 135664 + 37863 173527? It is not; and KANT actually urges this as an argument for holding these propositions to be synthetic. Yet it tells rather against their being unprovable; for how, if not by means of a proof, are they to be seen to be true, seeing that they are not immediately self-evident? KANT thinks he can call on our intuition of fingers or points for support, thus running the risk of making these propositions appear to be empirical, contrary to his own expressed opinion; for whatever our intuition of 37863 fingers may be, it is at least certainly not pure. Moreover, the term "intuition" seems hardly appropriate, since even xo fingers can, in different arrangements, give rise to very different intuitions. And have we, in fact, an intuition of 135664 fingers or points at all? If we had, and if we had another of 37863 fingers and a third of 173527 fingers, then the correctness of our formula, if it were un-provable, would have to be evident right away, at least as applying to fingers; but it is not."

ímpeto da criação de um sistema lógico quantificacional robusto parece ter conduzido Frege a um posicionamento talvez equivocado em relação à aritmética epistemicamente justificada desenvolvida por Kant. Conforme pudemos ver anteriormente, Michael Friedman responde de maneira apropriada à crítica de Frege, por meio da pormenorização da aritmética kantiana e, assim, da explicação do procedimento que, tendo como base a intuição geométrica (espacial), utiliza-se da *doutrina pura do movimento* a fim de gerar representações numéricas abstratas para as grandezas espaciais. Embora a lógica quantificacional (∀∃) possa lidar com a sequência numérica e com operações matemáticas, ela consiste em uma simbolização ulterior ao procedimento cognitivo apresentado por Kant. Tendo em vista que Frege não tem uma preocupação epistemológica, mas sim, meramente lógica, ele de fato pode simplesmente ignorar a intuição pura contida no processo kantiano de construção matemática. John MacFarlane ressalta de maneira apropriada que a lógica fregeana não é um empecilho para a intuição pura do tempo, visto que "aquilo que Kant consegue representar apenas através da construção na intuição. Frege consegue representar usando o vocabulário que ele considera como lógico"[66]. Tal vocabulário lógico seria apenas um vocabulário utilizado como meio para a simbolização de operações. Podemos utilizar como exemplo a relação *R* citada por MacFarlane: "(D) $(\forall x)(\forall y)(Rxy \supset (\exists z)\ (Rxz \ \&\ Rzy))$[67]". Esta relação, apesar do refinamento de sua representação gráfica quantificacional, em última instância, não pode prescindir da intuição pura sem prescindir simultaneamente da epistemologia propriamente humana. MacFarlane afirma que:

> É natural para nós pensar que Frege refutou o ponto de vista de Kant de que a noção de uma ordenação densa só pode ser representada através da construção na intuição. Certamente, suponhamos que, se Kant tivesse sido ressuscitado, ensinado a lógica moderna e confrontado com (D), ele teria sido racionalmente compelido a abandonar essa visão. Mas isso está longe de ser claro. Kant poderia afirmar que o *Begriffsschrift* de Frege não é uma lógica adequada, mas uma espécie de combinatória abstrata, e que o significado dos quantificadores iterados só pode ser apreendido através da construção na intuição pura.[68]

[66] MACFARLANE, 2002, p. 2. "[..] What Kant can represent only through construction in intuition, Frege can represent using vocabulary he regards as logical."
[67] Ibid.
[68] Id. p. 3. "It is natural for us to think that Frege refuted Kant's view that the notion of a dense ordering can only be represented through construction in intuition. Surely, we suppose, if Kant had been resurrected, taught modern logic, and confronted with (D), he would have been rationally compelled to

O argumento que pretendemos defender neste trabalho – em relação à crítica de Frege - consiste justamente na explicação supracitada. A lógica quantificacional é apenas uma simbolização; um vocabulário; e uma teorização matemática que apenas formaliza operações, i.e., a cognição aritmética é dada por meio da intuição pura do tempo. Assim, Frege – ao aceitar a intuição pura do espaço e negar a intuição pura do tempo – acaba por cometer um erro de cunho epistêmico. *Se a geometria precisa de uma intuição pura porque, então, a aritmética não precisa?* Uma vez que a lógica quantificacional não lida com os aspectos cognitivos – mas, apenas formais - da aritmética, seria um tanto superficial afirmarmos que a intuição pura foi suplantada pela teoria fregeana.

Robert Hanna - em seu artigo *Mathematic for Humans* - ao afirmar que “a visão de Kant, pelo contrário, é que a matemática pode incluir essencialmente elementos lógicos sem, de modo algum, minar sua sinteticidade”[69] defende justamente que “as séries temporais sucessivas trazidas pela intuição pura[70]” não prescindem de elementos lógicos, mas sim, são conjugadas com tais elementos. O autor afirma que:

> A visão de Kant sobre os números, ao contrário de qualquer teoria que tente dar uma redução da aritmética à lógica, é que algo é um número natural se e somente se satisfaz as categorias puramente lógicas de quantidade e é isomórfico a alguma parte das séries numéricas sucessivas, unidirecionais e infinitas, trazidas pela intuição pura. Assim, um dado número é como coletamos ou coligamos todos Fs, ou alguns Fs, ou o/este F, de uma forma que imita formalmente a síntese sucessiva unidirecional de momentos no tempo. O número 5, por exemplo, é como coletamos ou coligamos qualquer que seja o conceito F (digamos, todos os dedos em uma mão, incluindo o polegar) exatamente da mesma maneira que nós representacionalmente geramos apenas muitos momentos de tempo. E o número zero é como coletamos ou coligamos nenhum Fs exatamente da mesma maneira que nós representacionalmente não geramos momentos de tempo representando o presente especioso em que nada ainda aconteceu - o ‘início’, a intuição pura = 0’ [...] Em outras palavras, a geração representacional de números por contagem é a representação lógica de todos os objetos, de alguns objetos, do objeto / ou mesmo de nenhum objeto (que é representado em termos de negação e quantificador particular), sob alguma ordem de primeira

abandon this view. But this is far from clear. It would have been open to Kant to claim that Frege’s *Begriffsschrift* is not a proper logic at all, but a kind of abstract combinatorics, and that the meaning of the iterated quantifiers can only be grasped through construction in pure intuition.”

[69] HANNA, 2002, p. 339. “Kant’s view, on the contrary, is that mathematics can essentially include logical elements without in any my undermining its syntheticity.”

[70] Id. p. 341. “[...] the sucessive time-series picked out by pure intuition [...].”

> ordem tipicamente, empírico) conceito C, tomado em conjunto com a representação do tempo.[71]

E é nessa perspectiva que propomos uma chave de leitura para o problema, ou melhor, para a proposta logicista de reduzir a aritmética à lógica: O aparato lógico quantificacional não invalida a intuição pura do tempo na aritmética, mas, pelo contrário, só pode alcançar sua plena realização aceitando a intuição do tempo enquanto capacidade da razão humana, capacidade esta sem a qual o logicismo torna-se uma tentativa ingenuamente formal e realista de elevar a matemática ao nível de ciência.

Frege aceita a intuição pura do espaço, mas nega a intuição pura do tempo, a fim de que a aritmética seja uma ciência independente com critérios de demarcação lógicos objetivos e, portanto, isento de critérios psicológicos – embora Kant não propusesse um psicologismo conforme compreendido pelos logicistas. Na passagem abaixo vemos Frege aceitando, de um lado, a intuição do espaço como sendo válida para a construção geométrica e, por outro, negando que a aritmética possa ser baseada em uma intuição *a priori:*

> [...] De modo geral, será conveniente não sobrestimar o parentesco com a geometria. [...]. Um ponto geométrico considerado em si mesmo não se pode absolutamente distinguir de qualquer outro; o mesmo vale para retas e planos. Vários pontos, retas e planos podem distinguir-se apenas quando apreendidos simultaneamente em uma intuição. Se em geometria leis gerais são obtidas a partir da intuição, isto explica-se pelo fato de que os pontos, retas e planos intuídos não são propriamente particulares, podendo por isso valer como representantes de toda sua espécie. Isto não ocorre no caso dos números: cada um tem sua peculiaridade. Em que medida um número determinado pode representar todos os outros, e em que momento

[71] Ibid. "Kant's view about the numbers, by contrast to that of any theory attempting to give a reduction of arithmetic to logic, is that something is a natural number If and only if it satisfies the purely logical categories of quantity and is isomorphic to some part of the infinite unidirectional successive time - series picked out by pure intuition. So a given number is how we collect or colligate all Fs, or some Fs, or the/ this F, in a way that formally mimics the unidirectional successive synthesis of moments in time. The number 5, e.g., is how we collect or colligate what - ever falls under the concept F (say, all the fingers on one hand including the thumb) in exactly the same way that we representationally generate just that many moments of time. And the number zero is how we collect or colligate no Fs at all in exactly the same way that we representationally generate no moments of time by representing the specious present in which nothing has yet happened — the 'beginning, the pure intuition = 0' [...]. Otherwise put, the representational generation of numbers by counting is the logical representation of all objects, some objects, the/ this object, or even no objects (which is represented in terms of negation and the particular quantifier), under some first - order (typically, empirical) concept C, taken together with the representation of time."

> sua particularidade se faz valer, é algo que não se pode dizer de antemão.[72]

O formalismo de Frege desconecta a aritmética da geometria sob o pretexto de que as peculiaridades numéricas não podem ser dadas aprioristicamente. Por meio da noção de *iteração sucessiva* a possibilidade de construirmos aprioristicamente grandezas numéricas parece não apenas plausível, como também a possibilidade teórica epistemológica mais adequada para explicarmos a capacidade da razão humana de realizar operações numéricas. Kant, apesar de não dispor de teorias cognitivas adequadas, parece ter descrito – da melhor maneira possível, dado seu contexto histórico – o processo de cálculo aritmético que hoje denominamos *mental.* A partir dessa pressuposição, poderemos defender apropriadamente o mérito kantiano contra as críticas logicistas que, por vezes – sob o pretexto da superação do caráter metafísico da intuição - pretendem desconsiderar o aparato conceitual kantiano. Precisamos, igualmente, levar em conta que as faculdades kantianas se aplicam à mente psicológica, de modo que a iteração sucessiva constitui um processo temporal mental, conforme veremos no decorrer deste trabalho.

Vale ressaltar a posição de Michael Dummett quanto à fundamentação da filosofia. O autor afirma que ao passo que Descartes defendia que a epistemologia seria o fundamento da filosofia. Frege, por outro lado, teria suplantado tal concepção ao afirmar que a filosofia da linguagem constitui a base da filosofia.[73] Dummett afirma que Frege não deixava de se preocupar com a fundamentação e a justificação da matemática, mas sim que ele o fazia a partir da lógica e da filosofia da linguagem. Ora, Kant – ao buscar um conhecimento real – necessita de bases epistemológicas (mentais), o que constitui um expediente deveras diferente do de Descartes. Kant não defendia um inatismo de ideias no sentido cartesiano. Seu idealismo transcendental, enquanto inatismo de faculdades apresenta uma concepção de idealismo que se distancia de Descartes, bem como, fornece as bases epistemológicas necessárias

[72] Op. Cit. §13. “We shall do well in general not to overestimate the extent to which arithmetic is akin to geometry. […]. One geometrical point, considered by itself, cannot be distinguished in any way from any other; the same applies to lines and planes. Only when several points, or lines or planes, are included together in a single intuition, do we distinguish them. In geometry, therefore, it is quite intelligible that general propositions should be derived from intuition; the points or lines or planes which we intuit are not really particular at all, which is what enables them to stand as representatives of the whole of their kind. But with the numbers it is different; each number has its own peculiarities. To what extent a given particular number can represent all the others, and at what point its own special character comes into play, cannot be laid down generally in advance.”

[73] Cf. DUMMETT, 1973, p. 667.

para uma fundamentação da matemática que não seja reducionista e meramente formalista. Desse modo, Kant pode apresentar uma teoria completa da matemática, teoria esta que não toma a lógica como ponto de partida formal e arbitrário, o qual prescinde das características mentais humanas - racionais e intuitivas - para a justificação e fundamentação da matemática. Frege parece ter considerado a epistemologia kantiana semelhante à cartesiana e, por esse motivo, recusou a primeira em vista de interpretá-la de maneira psicologista e metafísica. A filosofia transcendental, contudo, se distancia da leitura efetuada por Frege e apresenta a intuição pura não como algo intangível - e, portanto, inadequado para a fundamentação da matemática – mas como uma base sólida que pode e precisa ser empregada em um edifício teórico que busque a validade real de juízos matemáticos operados por seres humanos. Frege, na tentativa de elevar a matemática ao nível de ciência, prescindiu de fatores mentais sem os quais a própria ciência se torna incompleta, uma vez que a epistemologia é condição *sine qua non* para a cientificidade.

2.2 A crítica de Russell

Bertrand Russell apresenta a mesma espécie de crítica – realizada por Frege – em relação à *intuição pura* tomada enquanto fundamento da aritmética. Ao afirmar que a matemática é constituída por meras deduções lógicas, ele não se ocupa com o problema da fundamentação epistemológica dos juízos aritméticos. Na obra *The Principles of Mathematics* Russell esclarece que:

> Havia, até muito recentemente uma especial dificuldade nos princípios da matemática. Parecia óbvio que a matemática consiste em deduções, mesmo que as concepções ortodoxas de dedução fossem amplamente ou completamente inaplicáveis para à matemática existente. Não apenas a teoria silogística aristotélica, mas, também as doutrinas modernas da lógica simbólica, eram ambas teoricamente inadequadas para o raciocínio matemático, ou de qualquer maneira exigiam formas tão artificiais de asserção que elas não podiam ser efetivamente aplicadas. Nesse fato jaz a força da concepção kantiana, a qual afirmava que o raciocínio matemático não é estritamente formal, mas, sempre usa intuições, i.e., o conhecimento *a priori* de espaço e tempo.[74]

[74] RUSSELL, *The Principles of Mathematics,* p. 4. “There was, until very lately, a special difficulty in the principles of mathematics. It seemed plain that mathematics consists of deductions, and yet the orthodox accounts of deduction were largely or wholly inapplicable to existing mathematics. Not only the Aristotelian syllogistic theory, but also the modem doctrines of Symbolic Logic, were either theoretically inadequate to mathematical reasoning, or at any rate required such artificial forms of statement that they

Podemos constatar que Russell aponta para a noção de *intuição pura* como aquela que trouxe uma solução para a dificuldade enfrentada pelas teorias lógicas formais quando da fundamentação do raciocínio matemático. Contudo, o autor considera o recurso à *mente* (*mind*) como sendo um expediente "totalmente irrelevante"[75], de modo que não haveria necessidade de nenhuma espécie de fundamentação epistêmica mental para a matemática, mas sim, apenas a necessidade da correta formalização da mesma.

Nicholas Griffin, ao apresentar a trajetória de Russell, pontua o cerne e a origem da crítica a Kant:

> Seus esforços iniciais foram projetados para separar os elementos a priori dos a posteriori dentro de cada ciência, estabelecendo o primeiro como os princípios que eram necessários tanto para a ciência como para a nossa experiência do assunto com o qual a ciência tratava. Em 1899, porém, Russell veio a rejeitar essa metodologia essencialmente kantiana, em grande parte porque ele sentia que não poderia ser totalmente livre do psicologismo. O método sustentava que certas afirmações deviam ser aceitas sobre o espaço, por exemplo, no caso de nossa experiência espacial ser possível. Mas, nunca pôde ser estabelecido que tais afirmações fossem verdades geométricas genuínas sobre o espaço, e não verdades psicológicas sobre a nossa experiência. A menos que essas últimas pudessem ser excluídas, o espaço seria subjetivo e a geometria subordinada à psicologia.[76]

Russell não era um positivista lógico, era cientificista em relação à matemática e, desse modo, buscava um critério de demarcação para a ciência matemática. Tal critério "era o de que uma disciplina se torna ciência quando alcança uma definição suficiente de que suas hipóteses podem ser refutadas ou

could not be practically applied. In this fact lay the strength of the Kantian view, which asserted that mathematical reasoning is not strictly formal, but always uses intuitions, i.e. the *a priori* knowledge of space and time."

[75] Ibid. "[...] totally irrelevant notion of mind."

[76] GRIFFIN, 2003, p. 19. "His initial efforts were designed to separate the *apriori* from the *aposteriori* elements within each science, establishing the former as those principles which were necessary both for the science and for our experience of the subject matter with which the science dealt. By 1899, however, Russell had come to reject this essentially Kantian methodology, largely because he felt it could not be fully freed from psychologism. The method held that certain claims had to be accepted about space, for example, if our spatial experience was to be possible. But it could never be established that such claims were genuine geometrical truths about space rather than psychological truths about our experience. Unless the latter could be excluded, space would be subjective and geometry subordinated to psychology."

confirmadas”[77]. Em busca de tal critério Russell desenvolve um programa objetivista que não deixe espaço para *verdades psicológicas,* i.e., dependentes da mente. O filósofo galês desenvolve sua teoria com base em um “realismo absoluto”[78], o qual era:

> [...] baseado no pressuposto de que (quase) toda palavra que ocorre em uma frase tem um significado e o conteúdo de tal significado é um termo [...]. Os termos não são linguísticos nem psicológicos, mas constituintes objetivos do mundo. Conceitos, universais, complexos, particulares concretos e abstratos, objetos físicos e estados mentais são todos termos. De fato, qualquer coisa que possa ser contada como um ou que constitua objeto de uma proposição é um termo. Sentenças expressam proposições as quais são complexos de termos relacionados entre si. Todas as unidades complexas são proposições [...] e todas as proposições são termos complexos. Nem todos os termos existem, mas todos têm algum tipo de posição ontológica, que Russell chamou de ser.[79]

Esse realismo considera os termos como objetivos, como pertencentes ao mundo, i.e., como entidades que devem ser consideradas independentes da cognição subjetiva. Tal abordagem prescinde de todo e qualquer tipo de intuição e constitui um extremo no debate entre Kant e seus interlocutores, visto que pretende um grau de realidade e objetividade – para os termos – que desconsidera toda e qualquer tentativa de fundamentação epistêmica. Os processos mentais tornam-se dispensáveis e a matemática é elevada ao grau de ciência através de um procedimento que trata complexos de termos da mesma maneira que a física trata os objetos. Logo, o intuicionismo kantiano seria derrotado e a matemática, por fim, seria reduzida à lógica.

A tese de Russell contra a *intuição pura* baseia-se na ideia de que o raciocínio matemático é em si formal e que, portanto, não necessita de noções previamente pertencentes à cognição individual – espaço e tempo – a fim de obter a validade e a justificação dos juízos numéricos. Na seguinte passagem Russell ataca explicita e

[77] Ibid. “[...] was that a discipline became science when it achieves sufficient definiteness that its hypotheses can be refuted or confirmed.”
[78] Id. p. 20. “[...] absolute realism [...].”
[79] Ibid. “[...] based on the assumption that (almost) every word occurring in a sentence has a meaning and what it means is a term [...]. Terms are neither linguistic nor psychological, but objective constituents of the world. Concepts, universals, complexes, concrete and abstract particulars, physical objects, and mental states are all terms. Indeed, anything that can be counted as one or made the subject of a proposition is a term. Sentences Express propositions which are complexes of terms related together. All complex unities are propositions [...] and all propositions are complex terms. Not all terms exist but all have some kind of ontological standing, which Russell called being.”

minuciosamente a doutrina kantiana da *intuição pura* enquanto fundamento da matemática:

> Dessa forma, durante os últimos trinta ou quarenta anos, um novo objeto, o qual foi acrescentado muito desmedidamente à correção teórica, foi criado, e pode ser legitimamente chamado de aritmética; uma vez que, partindo de inteiros, ele é bem sucedido em definir qualquer coisa que seja requerida – racionais, limites, continuidade e etc. Resulta, portanto, que para toda álgebra e análise é desnecessário admitir qualquer material além de inteiros, os quais, [...] podem eles mesmos ser definidos em termos lógicos. É essa ciência, bem mais que a geometria não euclidiana, que é realmente fatal para a teoria kantiana das intuições a priori enquanto bases da matemática. Antigamente, continuidade e irracionais eram os redutos da escola que pode ser denominada *intuicionista,* mas, tais redutos não mais a pertencem. A aritmética tem crescido ao ponto de incluir tudo que pode ser estritamente chamado *puro* na matemática tradicional.[80]

A aritmética é apresentada como não necessitando de nada além de *inteiros (integers),* os quais seriam dados sem nenhum recurso à intuição pura. Desta maneira, a aritmética fundada na lógica seria *fatal* para a noção de *intuição pura,* uma vez que dispensaria a construção iterativa via intuição pura do tempo realizada pela razão, isto é, pelo assim denominado *psicologismo kantiano*.

Neste ponto, vale trazermos novamente presente o texto de Friedman, o qual identifica o aparente erro do logicismo em julgar apressadamente a intuição pura como sendo um expediente obsoleto:

> Nós agora alcançamos a questão que subjaz tais considerações, uma questão a qual nós postergamos. A aritmética, com certeza, compreende em sua essência a noção de iteração progressiva; mas, por que essa ideia deveria estar relacionada com o tempo? A iteração progressiva não é, de fato, um conceito muito mais abstrato do que qualquer conceito temporal? A resposta para tal questão foi melhor expressa por Parsons: 'iteração finita é uma contraparte abstrata da noção de repetição sucessiva. Mas, descrevê-la em termos abstratos foi algo muito além dos recursos lógicos e matemáticos de Kant e de

[80] Op. Cit. p. 157. "In this way, during the last thirty or forty years, a new subject, which has added quite immeasurably to theoretical correctness, has been created, which may legitimately be called Arithmetic; for, starting with integers, it succeeds, in defining whatever else it requires - rationals, limits, irrationals, continuity, and so on. It results that, for all Algebra and Analysis, it is unnecessary to assume any material beyond the integers, which, […] can themselves be defined in logical terms. It is this science, far more than non-Euclidean Geometry, that is really fatal to the Kantian theory of a priori intuitions as the basis of mathematics. Continuity and irrationals were formerly the strongholds of the school who may be called intuitionists, but these strongholds are theirs no longer. Arithmetic has grown so as to include all that can strictly be called pure in the traditional mathematics."

> seus contemporâneos; a tarefa foi realizada pela primeira vez na década de 1880 por Frege e Dedekind' [...]. Assim, nós agora podemos articular teorias abstratas da iteração progressiva através da formulação de um conjunto de axiomas para a aritmética, ou através da tentativa de definir de maneira explícita os números naturais - sobre as bases da teoria do ancestral, digamos [...]. Ambas as abordagens requerem que façamos um apelo essencial à lógica moderna, formulada adequadamente pela primeira vez por Frege em 1879. Em relação à primeira, faremos, ao menos, um apelo à teoria quantificacional poliádica. E, no tocante à segunda, apelaremos para a teoria dos conjuntos ou para alguma forma de quantificação de ordem mais elevada. Contudo, visto que a lógica geral, para Kant, é dada basicamente pela silogística aristotélica, não há lugar em sua concepção para uma representação puramente conceitual de iteração progressiva na mera lógica geral: intuição pura (e, portanto, a lógica transcendental) precisa ser requisitada.[81]

O fato de Kant conhecer apenas a lógica aristotélica o conduz à intuição pura enquanto fundamento da construção aritmética. E, a partir disso, o fato de o logicismo substituir a intuição pura (e a lógica transcendental) pela lógica formal parece fazer sentido. *Contudo, a lógica matemática possui condições de suplantar a intuição pura?* Kant, ao adotar a lógica aristotélica como forma geral do pensamento acaba por necessitar da intuição, mas, por outro lado, a lógica moderna parece não ser capaz de substituir o aparato epistêmico kantiano em virtude de ela ser meramente formal. Nessa perspectiva, se tivermos em mente que a preocupação de Kant era epistêmica, mesmo que ele dispusesse da lógica matemática, haveria igualmente a necessidade de um ponto de ancoramento epistêmico mental. Sem a intuição pura poder-se-ia executar operações matemáticas, mas, continuaríamos sem a explicação de como tais operações acontecem na consciência individual. Logo, o problema da fundamentação continuaria sem solução.

[81] FRIEDMAN, 1990, p. 233. "We have now reached the question lying behind these considerations, a question we have been postponing. Arithmetic, to be sure, essentially involves the notion of progressive iteration; but why should this idea, in turn, essentially involve time? Is not progressive iteration in fact a much more abstract concept than any temporal concept? The answer to this question has been well expressed by Parsons: 'finite iteration is an abstract counterpart of the notion of successive repetition. But to describe it in abstract terms was quite beyond the logical and mathematical resources of Kant and his contemporaries; the task was first accomplished in the 1880's by Frege and Dedekind' […]. Thus, we can now articulate abstract theories of progressive iteration either by formulating a set of axioms for arithmetic, or by attempting explicitly to define the natural numbers - on the basis of the theory of the ancestral, say. On either approach we will make an essential appeal to the modern logic first adequately formulated by Frege in 1879: to at least polyadic quantification theory on the first approach, to set theory or some form of higher-order quantification on the second. However, since general logic, for Kant, is given basically by Aristotelian syllogistic, there is no room, on his conception, for a purely conceptual representation of progressive iteration in mere general logic: pure intuition (and therefore transcendental logic) must be called in."

Frode Kjosavik acredita que:

> Se a lógica moderna se revela matemática, o fato de que propriedades do espaço, como a densidade, podem ser expressas na lógica moderna não as torna independentes da intuição, nem tampouco demonstra que nossa representação básica do espaço é um conceito ao invés de uma intuição pura.[82]

Ao cotejarmos os textos de Friedman e Kjosavik com as passagens dos textos de Frege e Russell, podemos notar que o programa da lógica moderna não é completamente errôneo, como tampouco pode ser ignorado ou considerado sem utilidade para a matemática. Entretanto, a grande questão consiste em a lógica quantificacional ser tomada pura e simplesmente em si mesma enquanto mecanismo de validação para o ajuizamento matemático. Neste ponto, mais do que em qualquer outro, vale lembrarmos da diferença de objetivos entre o logicismo e o intuicionismo. Aquele – em vista de ser de caráter pragmatista – preocupa-se com o resultado imediato da teorização matemática, ao passo que este busca não apenas o resultado, mas sim, todo o processo de lógico e epistemológico de cálculo.

Se tomarmos a seguinte proposição:

A= x é igual que 1 (um). B= x é menor do que 10 (dez)	$\forall x\ (Ax \rightarrow Bx)$ Ou ainda $\forall x\ (x=1 \rightarrow x<10)$

poderemos perceber que há aí uma mera representação gráfica de uma inferência que necessita da construção operada pela assim denominada *mecânica pura*, uma vez que o quantificador universal, os conectores e as variáveis, quando tomados em si mesmos, não podem executar a operação mental objetiva – ou, se preferirmos, *cerebral* – da qual eles constituem meros signos. Assim, o logicismo tomado em si mesmo – e enquanto teoria *ad hoc* – não necessita da intuição pura, mas se olharmos para incompletude do logicismo enquanto teoria, veremos que ele prescinde pura e simplesmente da proposta epistemológica kantiana e não oferece nada para a

[82] KJOSAVIK, 2009, p. 7. “[…] If modern logic turns out to be mathematics, the fact that properties of space, like denseness, can be expressed within modern logic does not itself make them independent of intuition, nor does it show that our basic representation of space is a concept rather than a pure intuition […].”

fundamentação mental da matemática, mas apenas a lógica, a qual se mostra de caráter extrínseco em relação às capacidades mentais humanas e seu papel na matemática. Não haveria problema filosófico algum se os logicistas não tivessem eliminado sumariamente o papel da intuição pura kantiana enquanto instância primária da cognição matemática. Contudo, eles o fazem, bem como, acusam Kant de estar errado e – diga-se novamente – apresentam arbitrariamente a lógica como base suprema para toda matemática possível.

Jaakko Hintikka apresenta uma problematização dos axiomas matemáticos derivados exclusivamente na lógica e, os apresenta como problemáticos no que tange à filosofia da matemática. Hintikka afirma que:

> O único ponto que quero abordar aqui diz respeito à direção na qual outros axiomas foram buscados. (Isso, parece-me, pode vir a ser o problema filosófico crucial nesta área.) Esses novos axiomas têm sido frequentemente formulados como postulações de números cardinais adequados ‘muito grandes’. Há uma certa lógica interna em ação aqui, mas não podemos deixar de nos perguntar se alguma maneira completamente diferente de olhar para eles poderia ser defendida pela filosofia. Afinal, essas suposições têm, em geral, consequências puramente aritméticas, embora não parecemos ter intuições fortes sobre essas consequências aritméticas para dizer muito sobre elas.[83]

Nessa interessante passagem, Hintikka crítica a axiomatização desprovida de intuição e afirma que isto pode constituir um problema filosófico fundamental. O logicismo ainda que enquadrado no campo da filosofia da matemática, ignora o problema filosófico do papel da intuição no conhecimento matemático. A questão seria deveras mais simples se o logicismo não pretendesse lidar com o problema filosófico e se restringisse ao problema matemático pragmatista, uma vez que reduzir a matemática à lógica desconecta a matemática de suas condições de possibilidade e a trata como uma ciência exata, como um procedimento de cálculo sem preocupação com problematizações de ordem epistêmica mental.

[83] HINTIKKA, 1969, p. 7. The only point that I want to make here concerns the direction in which further axioms have been sought. (This, it seems to me, might turn out to be the crucial philosophical problem in this area.) These new axioms have often been formulated as postulations of suitable 'very large' cardinal numbers. There is a certain inner logic at work here, but one cannot help wondering whether some completely different way of looking at them might be philosophically defensible. After all, these assumptions have in general definite purely arithmetical consequences, although we do not seem to have strong enough intuitions about these arithmetical consequences to say much about them.

3. As geometrias não euclidianas e as físicas não newtonianas

O sistema kantiano, além de ter a lógica aristotélica como pressuposto fundamental – conforme visto anteriormente – é sabidamente baseado na geometria euclidiana e na física newtoniana. O advento de novos modelos geométricos e físicos são comumente vistos como desafios para filosofia kantiana da matemática. Cumpre, pois que façamos uma breve análise dos modelos adotados por Kant bem como dos modelos posteriores.

3.1 Geometria euclidiana e geometrias não-euclidianas

A geometria de Euclides, conforme apresentada em *Os Elementos*, consiste em uma concepção espacial tridimensional plana, i.e., composta por linhas retas que, quando em paralelismo umas com as outras não sofrem curvatura negativa ou positiva. Tal concepção é formulada fundamentalmente a partir de cinco postulados apresentados na obra referida:

> Permita-se postular: 1. Traçar uma linha reta a partir de um ponto qualquer para outro e [...] 2. Produzir uma linha reta finita continuamente em uma linha reta e [...] 3. Traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio e [...] 4. Todos os ângulos retos são iguais uns aos outros e [...] 5. Se uma linha reta, ao cortar duas (outras) linhas retas, forma ângulos internos no mesmo lado (cuja a soma é) menor que dois ângulos retos, então, essas duas linhas retas, sendo geradas ao infinito, encontrar-se-ão no lado (da linha reta original) cuja (soma dos ângulos internos) é menor que dois ângulos retos (e não encontrar-se-ão no outro lado).[84]

A tese euclidiana sumamente atacada pelas geometrias não euclidianas está contida no quinto postulado supracitado, em vista de este conter afirmações que não procedem necessariamente dos quatro postulados anteriores. Tal postulado implica que "a partir um determinado ponto em um plano nós possamos traçar apenas uma

.[84] EUCLIDES, 2007, p. 7. 1. "Let it have been postulated: 1. To draw a straight-line from any point to any point […] 2. And to produce a finite straight-line continuously in a straight-line […] 3. And to draw a circle with any center and radius […] 4. And that all right-angles are equal to one another […] 5. And that if a straight-line falling across two (other) straight-lines makes internal angles on the same side (of itself whose sum is) less than two right-angles, then the two (other) straight-lines, being produced to infinity, meet on that side (of the original straight-line) that the (sum of the internal angles) is less than two right-angles (and do not meet on the other side)."

linha paralela em relação a outra determinada linha"[85]. Logo, o assim denominado *postulado das paralelas* poderia ser representado da seguinte forma:

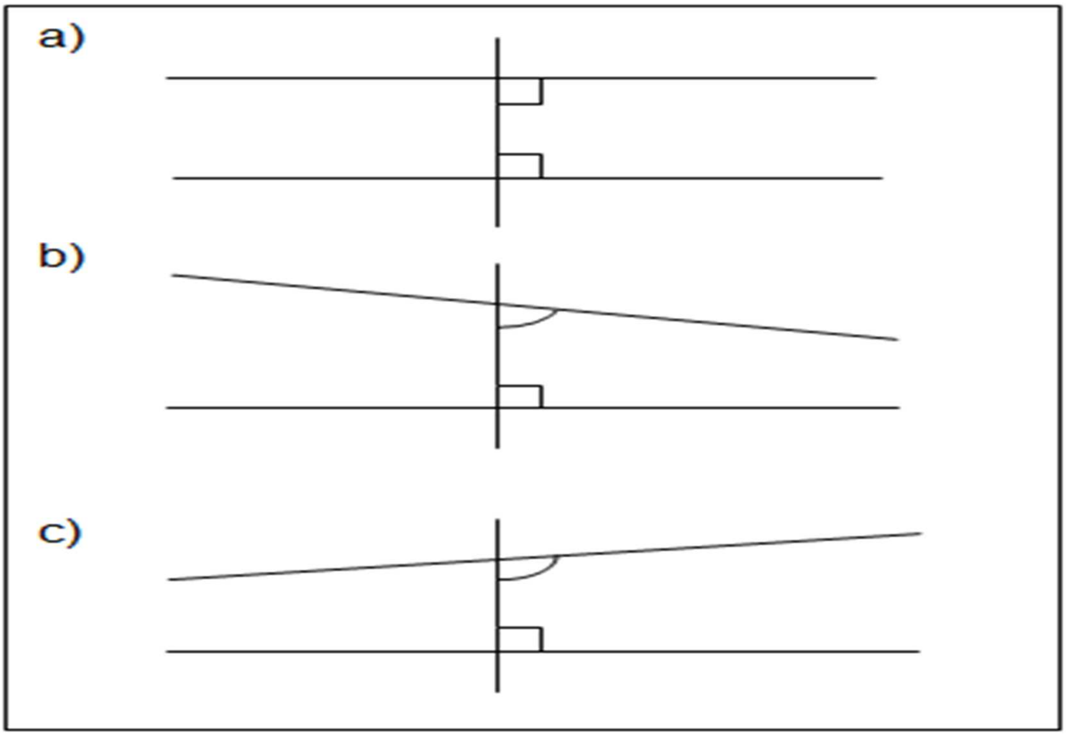


Figura 1

Com base no quinto postulado euclidiano, representado acima, poderemos discorrer a respeito do nascimento das geometrias não euclidianas e de sua problematização concernente ao postulado das paralelas.

Hanna denomina a concepção kantiana – acerca do papel da geometria euclidiana na filosofia transcendental – como *"A Tese Euclidiana Forte"*[86] *(The Strong Euclidean Thesis)*, a qual consiste em afirmar que o espaço deve ser considerado como sendo ao mesmo tempo tridimensional e euclidiano. A partir desta primeira tese surge *"A Tese Euclidiana Fraca"*[87] *(The Weak Euclidean Thesis)* a qual afirma que o espaço não é necessariamente euclidiano, mas sim, apenas de maneira contingente. A primeira tese tem sido o alvo de críticas acirradas por parte da maioria dos filósofos analíticos, uma vez que "é afirmado que o próprio fato da existência de geometrias

[85] LOBACHEVSKY, 2010, p. 3. "[...] from a given point in a plane we can draw only one line parallel to another given line [...]."
[86] HANNA, 2001, p. 270.
[87] Ibid.

não euclidianas consistentes (descobertas não muito depois da morte de Kant por Gauss e posteriormente desenvolvidas por Riemann, Lobachevsky e outros) demonstra imediatamente que a Tese Forte é falsa”[88]. O fato de a tese euclidiana fraca poder ser a mais adequada, em nada desmerece o sistema kantiano, uma vez que para nós, seres humanos, o espaço se apresenta necessariamente como sendo euclidiano.

Phillip Kitcher faz uma crítica pontual à tese kantiana de que a intuição pura do espaço – que constitui a geometria – seria a base da necessidade matemática. O autor identifica que:

> O problema jaz na estrutura subjacente à teoria kantiana. Essa estrutura apresenta a mente produzindo suas próprias criações e o olho ingênuo da mente escaneando tais criações e detectando suas propriedades com absoluta precisão. Kant tenta derivar uma teoria clara de conhecimento matemático a partir dessa estrutura [...].[89]

A crítica, elaborada por Kitcher, consiste em uma contestação da capacidade humana em captar o múltiplo espacial externo de maneira arguta, o que impossibilitaria afirmarmos com absoluta precisão se, por exemplo, uma linha é “reta”[90] ou “quase reta”[91]. Mesmo que tal impossibilidade fizesse parte de “nossas limitações físicas”[92], precisaríamos de uma base de comparação para os dois tipos de linha supracitados e tal base seria a geometria – apreendida por meio de estudo e, portanto, *a posteriori.*[93] Uma vez que, conforme o autor, nós não temos a capacidade de diferenciar linhas *retas* de *quase retas*, a intuição pura do espaço (euclidiano) não seria a base para a correta apreensão e representação mental dos dados espaciais do mundo externo. A afirmação de que a geometria é algo apreendido e não intuído, leva à conclusão de que não haveria base alguma para sustentarmos – juntamente

[88] Ibid. “It is argued that the very fact of consistent non-Euclidean geometries (as discovered not long after Kant’s death by Gauss, and developed later by Riemann, and others) shows immediately that the Strong Thesis is false.”
[89] KITCHER, 1975, p. 50. “The problem lies with the picture behind Kant's theory. That picture presents the mind bringing forth its own creations and the naive eye of the mind scanning those creations and detecting their properties with absolute accuracy. Kant attempts to derive a clear theory of mathematical knowledge from that picture [...]”
[90] Ibid. “[...] straightline [...].”
[91] Ibid. “[...] ‘nearlystraight’ [...].”
[92] Ibid.” [...] physicall limitations of ours [...].”
[93] Cf. Ibid. “[...] until we have learned our geometry we are in no position to know that our failure is a medical accident – or indeed that it is failure.”

com Kant – a necessidade dos juízos sintéticos *a priori* da matemática – fundados na intuição pura do espaço. E isso, por sua vez, acarretaria que toda a estrutura da teoria kantiana estaria errada desde seus fundamentos mais básicos. Contudo, a diferenciação de linhas *retas* de *quase retas* não constitui um problema para Kant, uma vez que tal diferença é microscópica e, portanto, não faz parte da experiência sensorial corriqueira. A qual, de fato, era o alvo da estrutura epistemológica kantiana.

Com o questionamento da geometria euclidiana – por parte da comunidade científica – o caráter necessário da geometria euclidiana passou a ser fortemente atacado e alguns autores optaram por uma postura convencionalista quanto à escolha do modelo geométrico a ser utilizado. Sofia Stein efetua uma exposição precisa desta postura convencionalista, em especial daquela presente na filosofia da geometria de Poincaré. Vejamos:

> Poincaré afirma que não há como no caso dizer se a melhor descrição do que acontece, a partir dos pontos de vista dos observadores, é dada com o auxílio da geometria euclidiana ou da não-euclidiana. [...] Pode-se escolher, assim Poincaré, para aplicar aos mesmos fatos, com o auxílio de hipóteses auxiliares, qualquer um de, por exemplo, 3 geometrias: [...] a geometria euclidiana (movimento livre de corpos rígidos em um espaço euclidiano); a geometria de curvatura positiva constante (espaço elíptico ou de Riemann); a geometria da curvatura negativa (espaço hiperbólico ou de Bolyai-Lobachevsky). [...] Poincaré pensa estar a 'origem' das idéias geométricas em nossa observação do movimento dos corpos, incluindo o nosso. Essa origem restringe a possibilidade de construção de 'qualquer' geometria. Apesar da origem dessas 3 geometrias em um tipo de observação do movimento dos corpos, a escolha entre elas é convencional, ou seja, nada nosforça a escolher uma entre as 3 em detrimento das outras duas.[94]

Conforme a tese convencionalista supracitada, a geometria euclidiana não é a única que pode ser adotada, na verdade podemos escolher a geometria que desejarmos, dentro de certos limites e parâmetros. Mas, a própria autora afirma que segundo Friedman "Poincaré não está preocupado [...] com a 'equivalência empírica' entre os fatos que podem ser descritos tanto pela geometria euclidiana quanto pelas não-euclidianas"[95]. Logo, isso quer dizer que "a geometria considerada isoladamente não tem consequências empíricas".[96] Ora, se não existem consequências empíricas,

[94] STEIN, 2003, p. 186.
[95] Id. p. 187.
[96] FRIEDMAN. Poincaré's convencionalism and the logical positivism, p. 73. Apud: STEIN, 2003, p. 187.

o convencionalismo não constitui uma ameaça à filosofia kantiana da matemática, uma vez que – conforme afirmado anteriormente – Kant não se preocupava com estados de coisas meramente pensáveis, mas sim, com estados de coisas que pudessem fornecer um conhecimento empírico e universalmente válido. Portanto, Kant poderia escolher – de maneira convencional – a geometria euclidiana como sendo a que melhor descreve nossa percepção dos corpos, apesar de poderem existir outras geometrias – que pudessem ser utilizadas em aparatos científicos ou por seres não humanos.

A geometria euclidiana, contudo, vem sendo atacada em um ponto tido como sendo seu ponto fraco, a saber, o quinto postulado - o postulado das paralelas. Este postulado aparentemente é arbitrário em relação aos anteriores, bem como não se sustenta. A ideia de que múltiplas linhas possam ser traçadas a partir de um ponto externo a duas linhas paralelas constituiu a matéria prima para o desenvolvimento da geometria hiperbólica, a qual propõe uma nova e fascinante concepção espacial. Leonard Milodinow esclarece:

> O que é o espaço não euclidiano? O espaço que Gauss, Bolyai e Lobachevsky descobriram, o espaço hiperbólico, é o espaço que resulta da troca do postulado das paralelas pela concepção que afirma que para toda linha, existe não apenas uma, mas muitas linhas paralelas através de qualquer ponto externo dado.[97]

Essa concepção espacial, em vista de ser teoricamente possível, soa como uma alternativa ao paralelismo euclidiano. Na figura abaixo, podemos visualizar o espaço hiperbólico, conforme apresentado por Lobachevsky:

[97]MILODINOW, 2001, p. 121. “What is non-Euclidean space? The space that Gauss, Bolyai, and Lobachevsky discovered, hyperbolic space, is the space that results from replacing the parallel postulate by the assumption that for any line, there are not just one, but many parallel lines through any given external point.”

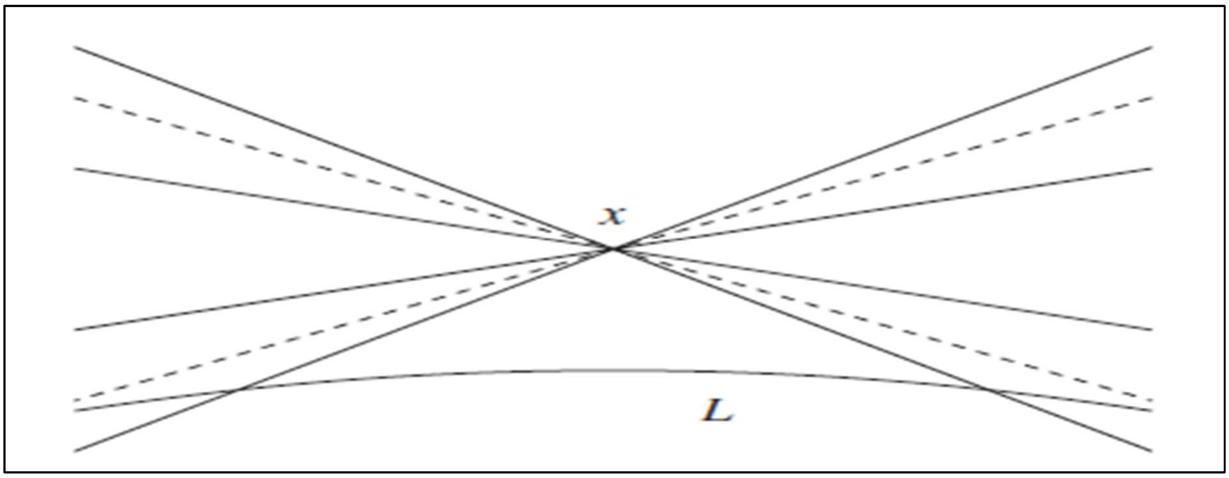


Figura 2

Vemos que a linha no ponto x, externo à linha L, permite não apenas o tracejo de uma linha tangente em relação à L, mas sim, o de várias linhas, sendo que pelo menos duas cortam a linha L. Vale ressaltarmos que o espaço hiperbólico possui curvatura negativa, logo, a linha L não é uma reta e sim uma hipérbole. Em uma primeira leitura, a geometria euclidiana parece ter sido ultrapassada de modo que ela não poderia mais ser considerada como tendo o caráter necessário que Kant a atribui, i.e., o caráter fundante do pensamento espacial *a priori*.

Lobachevsky, ao valer-se da geometria hiperbólica de Gauss e Bolyai, sintetiza a contento essa nova geometria, revolucionária e fascinante, que desafia o postulado das paralelas e, portanto, a geometria euclidiana como um todo.

Já na primeira página da sua obra *Pangeometry,* Lobachevsky explicita sua crítica à geometria euclidiana e procura estabelecer novas bases para esta ciência. Nesta longa e esclarecedora citação do texto referido podemos constatar pontualmente a discordância crítica do autor em relação às definições geométricas euclidianas, bem como identificar os pressupostos fundamentais de sua geometria hiperbólica:[98]

> As noções sobre as quais a geometria elementar é baseada não são suficientes para implicar a demonstração de um teorema, dizendo que a soma dos três ângulos de um triângulo retilinear arbitrário é igual aos dois ângulos retos, um teorema cuja validade não tem sido posta em dúvida por ninguém até agora, visto que não se encontra qualquer

[98] Para o bem da verdade, a geometria hiperbólica nasceu com Gauss e foi trabalhada por Bolyai e por Lobachevsky. Por motivos didáticos, nos deteremos na leitura deste último, uma vez que este apresenta inúmeros textos detentores de conteúdo acadêmico suficiente para uma abordagem da geometria hiperbólica como um todo. Para uma maior compreensão ver: MILODINOW, 2001, p. 115.

> contradição nas consequências que são deduzidas a partir dele, bem como, as medidas diretas dos ângulos de triângulos retilíneos, até os limites do erro das mais perfeitas medidas, concordam com esse teorema [...]. A insuficiência de noções fundamentais para a prova de tal teorema tem forçado os geômetras – explícita ou implicitamente – a admitir proposições auxiliares que, a despeito de parecerem simples, parecem igualmente arbitrárias e, consequentemente, inadmissíveis. [...] Ao invés de iniciar a geometria com o plano e a linha reta, como é usualmente feito, eu preferi iniciá-la com a esfera e o círculo, dos quais as definições não estão sujeitas à reprovação por serem incompletas, uma vez que elas contém a geração de magnitudes que estão sendo definidas [...]. Assim, eu defino o plano como o lugar geométrico das intersecções de esferas iguais descritas por dois pontos fixos enquanto centros [...]. Por fim, eu defino a linha reta como o lugar geométrico das intersecções de círculos iguais situados no mesmo plano e tendo dois pontos fixos - nesse plano - como centros [...]. Uma vez que essas definições de plano e de linha reta forem aceitas, toda a teoria dos planos e das linhas perpendiculares podem ser apresentadas e demonstradas com muita simplicidade e brevidade.[99]

A proposta lobachevskiana supracitada proporcionaria uma concepção de geometria que seria completa, isto é, uma geometria que possuiria definições capazes de gerarem figuras geométricas sem a necessidade de premissas ou axiomas auxiliares. A geometria euclidiana não fornece os pressupostos necessários para a geração de figuras geométricas complexas como, por exemplo, o círculo e a esfera de raios infinitos, os quais são identificados – no seio dos postulados euclidianos – com a linha reta e o plano respectivamente.

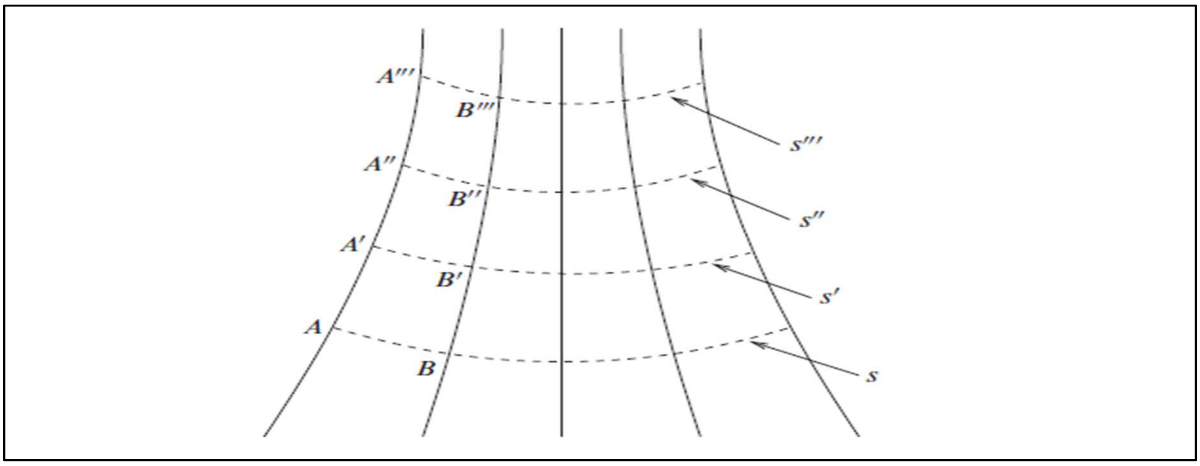
De fato, a geometria de Euclides parece não fornecer o substrato teórico para a geração de figuras que não estejam inseridas em um universo plano. Toda construção ulterior – de figuras geométricas que escapem às definições da geometria euclidiana – precisa valer-se de proposições auxiliares. Contudo, o fato de a geometria

[99] LOBACHEVSKY, 2010, p. 3. “The notions upon which elementary geometry is based are not sufficient to imply a proof of a theorem saying that the sum of the three angles of an arbitrary rectilinear triangle is equal to two right angles, a theorem whose validity has been doubted by nobody up to now, since one does not encounter any contradiction in the consequences that are deduced from it, and because the direct measurements of angles of rectilinear triangles, up to the limits of error of the most perfect measurements, agree with that theorem […]. The insufficiency of the fundamental notions for the proof of such a theorem has forced geometers explicitly or implicitly to admit auxiliary suppositions, which, although they appear simple, nevertheless appear arbitrary, and consequently, inadmissible. […] Instead of starting geometry with the plane and the straight line, as it is usually done, I preferred to start it with the sphere and the circle, whose definitions are not subject to the reproach of being incomplete, since they contain the generation of the magnitudes that are being defined […]. Then, I define the plane as the geometric locus of the intersections of equal spheres described by two fixed points as centers […]. Finally, I define the straight line as the geometric locus of the intersections of equal circles situated in the same plane and having two fixed points in that plane as centers […]. These definitions of the plane and of the straight line being accepted, all the theory of planes and of perpendicular lines can be presented and demonstrated with much simplicity and brevity.”

euclidiana não fornecer de maneira direta as bases para a geração de certas figuras não a invalida, visto que ela coincide com nossa percepção do mundo externo. Euclides parece fornecer uma concepção voltada para a experiência sensorial de um sujeito cognoscente real, vivendo experiências ordinárias de percepção e, portanto, enxergando e concebendo o múltiplo da experiência sensível como sendo plano. A possibilidade de uma geometria hiperbólica ser intuída aprioristicamente - ou inatamente - não parece plausível para seres humanos, i.e., seres que não percebem o mundo de maneira hiperbólica. Logo, as dificuldades teóricas que surgem com a adoção da geometria plana enquanto pressuposto da experiência não significam que poder-se-ia adotar a concepção de Lobachevsky como sendo a mais próxima em relação às faculdades geométricas humanas.

Abaixo, podemos visualizar o espaço hiperbólico:

Figura 3. LOBACHEVSKY, 2010, p. 11.



A seguinte figura apresenta de maneira concisa a representação das geometrias em questão. À esquerda vemos uma representação da geometria hiperbólica (Gauss, Bolyai e Lobachevsky); ao centro podemos constatar a geometria euclidiana; e, à direita, a geometria elíptica de Riemann:

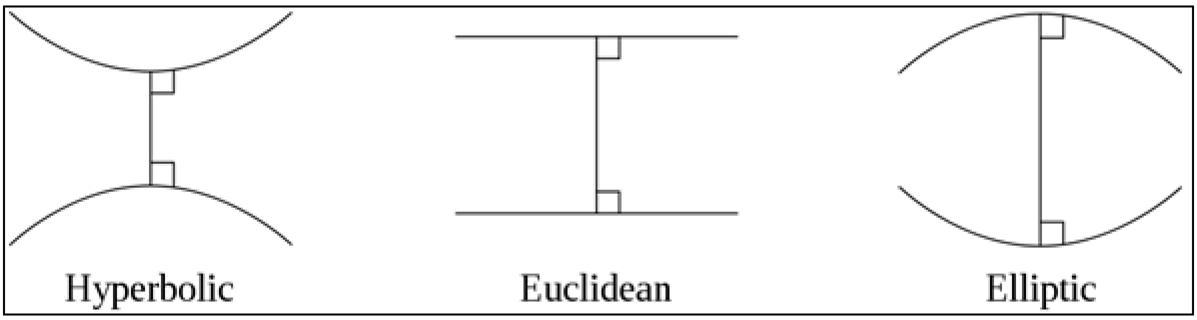


Figura 4

Eugenio Beltrami, por sua vez, em seu artigo intitulado “Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea” afirma que:

> [...] tentamos, tanto quanto nossas forças o hão permitido, demonstrar para nós mesmos os resultados fornecidos pela doutrina de Lobatschewsky; e, na sequência de um processo que parece em tudo compatível com as boas tradições da investigação científica, tentamos encontrar um verdadeiro substrato para tal doutrina, antes de admitir que essa necessita de uma nova ordem de entidades e conceitos. Acreditamos ter alcançado esta meta em relação à parte planimétrica, contudo, acreditamos ser impossível alcançá-la em relação ao resto.[100]

Jose Alberto Coffa, em sua obra seminal *The Semantic Tradition from Kant to Carnap,* apresenta apropriadamente o nascimento e o desenvolvimento das geometrias não euclidianas, bem como, sua utilização refutatória a Kant:

> O primeiro passo decisivo na derrubada da noção de uma necessidade da intuição não veio do positivismo. Apesar da opinião generalizada, ele não veio da descoberta da geometria hiperbólica ou mesmo do reconhecimento de sua consistência. Ironicamente, ele emergiu de uma tentativa de demonstrar que as novas geometrias não eram um desafio para Euclides [...]. Em 1868 Beltrami publicou um artigo intitulado 'Uma Tentativa de Interpretação da Geometria não euclidiana', no qual ele introduziu seu célebre modelo pseudo esférico. Caso a interpretação oferecida nesse artigo obtivesse êxito, tal artigo estabeleceria a consistência da geometria hiperbólica. Apesar das aparências, as doutrinas apresentadas não poderiam trazer nada além de conforto para as almas kantianas. O objetivo final de Beltrami não era propriamente interpretar, mas sim, reduzir a geometria hiperbólica à geometria euclidiana, bem como, argumentar que não havia mais sentido geométrico naquela do que aquele que se poderia derivar desta.[101]

[100] BELTRAMI, 1868, p. 1. “Mossi da questi intendimenti noi abbiamo cercato, per quanto Le nostre forze lo consentivano, di dar ragione a noi stessi dei risultati a cui conduce La dottrina di Lobatschewsky; e, segueado un processo checi sembra in tutto conforme alle buone tradizioni della ricerca scientifica, abbiamo tentato di trovare un substrato reale a quella dottrina, prima di ammettere per essa La necessit`a di um nuovo ordine di enti e di concetti. Crediamo d’aver raggiunto questo intento per la parte planimetrica diquella dottrina, ma crediamo impossibile raggiungerlo in quanto al resto.”

[101] COFFA, 1991, p. 48. “The first decisive step in the overthrow of the notion of a necessity of intuition did not come from positivism. Widespread opinion notwithstanding, it did not come from the discovery of hyperbolic geometry either, or even from the recognition of its consistency. Ironically, it emerged from an attempt to show that the new geometries were not a challenge to Euclid […]. In 1868 Beltrami published a paper entitled "An Attempt to Interpret Non-Euclidean Geometry," in which he introduced his celebrated pseudospherical model. Had the interpretation offered in that paper been successful, it would have established the consistency of hyperbolic geometry. Despite appearances, the doctrines put

A concepção de Beltrami surge como uma tentativa de respaldar a geometria hiperbólica do matemático russo Lobachevsky, o qual publicara em 1855 sua obra *Pangeometria*, a qual é considerada seu escrito mais maduro e completo acerca da teoria geométrica revolucionária – por desafiar a geometria plana euclidiana – tendo sido, contudo, desacreditada pela comunidade científica. Beltrami "[...] concluiu que o plano hiperbólico é, na verdade, a pseudoesfera euclidiana disfarçada, uma vez que a métrica euclidiana da pseudoesfera euclidiana coincide [...] com aquela do plano [hiperbólico] de Lobachevsky”[102]. Contudo, tal conclusão se refere somente ao plano bidimensional da geometria plana hiperbólica, visto que o matemático italiano não concordava com a alegação de que a geometria hiperbólica pudesse ser construída tridimensionalmente sem uma estrutura euclidiana, i.e., Beltrami descartava a possibilidade de a geometria hiperbólica 3D poder ser intuída - no sentido kantiano do termo *intuição*.

Em sua *Tentativa de Interpretação* da geometria hiperbólica, Beltrami afirma que para todo item x existente no plano euclidiano, existe um item correspondente na superfície pseudoesférica hiperbólica:

> Seja *pq* uma linha qualquer do círculo limite, *r* um ponto interno do círculo, porém externo à linha. À essa linha corresponde na superfície a uma geodésica *p' q'*, dirigida ao infinito para os pontos *p', q'*(correspondente a *p, q*); ao ponto *r* corresponde um ponto *r'*, localizado a uma distância finita e externo à geodésica *p'q'.* A partir desse ponto se pode extrair infinitas geodésicas, algumas das quais cruzam a geodésica *p'q'*, enquanto algumas não. As primeiras são representadas pelas linhas retas que vão do ponto *r* aos vários pontos do arco *pbq* (< 180º), as outras são representadas pelas linhas que – a partir do mesmo ponto – vão para vários pontos *pcq* (> 180º). Duas geodésicas especiais fazem a transição dos [pontos] de uma linha para os da outra: são aqueles representados pelas linhas retas *rp, rq*, ou seja, são as duas geodésicas que partem de *r'*e convergem ao infinito com *p'q'*, uma de um lado e a outra de outro. Visto que os ângulos retos *rqp*,*rpq* têm seus vértices sobre a periferia do círculo limite, temos que (II) os ângulos geodésicos correspondentes *r'q'p'*,*r'p'q'* são nulos, embora o primeiro seja finito. Na convergência,

forth could have brought nothing but comfort to Kantian souls. For Beltrami's ultimate goal was not so much to interpret as to reduce hyperbolic geometry to Euclidean geometry and to argue that there was no more geometric sense in the former than it could derive from the latter.”

[102] Id. p. 49. “[...] concluded that the hyperbolic plane is, in fact, the Euclidean pseudosphere in disguise, since the Euclidean metric of the Euclidean pseudosphere coincides [...] with that of Lobachevsky’s plane.”

> sendo *r* interno ao referido círculo e externo à linha *pq*, o ângulo *prq*é diferente de 0º e de 180º e assim, (I) as geodésicas correspondentes *r'p'*, *r'q'* formam em *r'* um ângulo puro diferente de 0º e de 180º. Portanto, se a geodésica *r'p'*, *r'q'* é dita paralela à *p'q'*, como demarcadora da transição entre as linhas que cruzam *p'q'* das que não cruzam, pode-se enunciar o resultado afirmando que: a partir de qualquer ponto (real) da superfície pode-se sempre gerar *duas* geodésicas (reais) paralelas a uma mesma geodésica (real) que não passa por esse ponto, e essas duas geodésicas perfazem entre si um ângulo diferente tanto de 0º quanto de 180º [...]. Para distinguir imediatamente, na geometria pseudoesférica, a interpretação de qualquer outra afirmação da geometria não-euclidiana, considere um triângulo geodésico.[103]

A geometria de Beltrami restringe a possibilidade prática de aplicação da geometria Lobachevskyana, de modo que a concepção tridimensional desta não passaria de uma mera possibilidade teórica e, por assim dizer, seria uma reles ilusão gerada pelo extrapolar dos limites da experiência possível. Ao olharmos para a representação do espaço bidimensional proposto por Beltrami, compreenderemos o que o autor está descrevendo:

[103] BELTRAMI 1868, p. 8. "Sia ora *pq* una corda qualunque del cerchio limite, *r* um punto interno al cerchio ma esterno alla corda. A questa corda corrisponde sulla superficie una geodetica *p' q'*, diretta verso i punti all'infinito *p', q'* (corrispondenti a *p, q*); al punto *r* corrisponde um punto *r'*, situato a distanza finita ed esterno alla geodetica *p'q'*. Da questo punto si possono spiccare infinite geodetiche, delle quali alcune incontrano lageodetica *p'q'*, Le altre non la incontrano. Le prime sono rappresentate dalle rette chevanno dal punto *r* ai varii punti dell'arco *pbq* (< 180º), le altre sono rappresentate da quelle chevanno dallo stesso punto ai varii punti dell'arco *pcq* (>180º). Due geodetiche speciali formano il trapassao da quelle dell'uma schiera a quelle dell'altra: sono quelle rappresentate dalle rette *rp, rq*, ossiasono le due geodetiche chepartono da *r '*e concorrono all'infinito colla *p'q'*, l'una da una parte, l'altra dall'altra. Siccome gli angoli rettilinei *rqp*, *rpq* hanno i loro vertici sulla periferia Del cerchio limite, così (II) i corrispondenti angoli geodetici *r'q'p'*, *r'p'q'* sono nulli, benché i primi sieno finiti. All'incontro, essendo *r* interno al detto cerchio ed esterno alla corda *pq*, l'angolo *prq* `e differente da 0º e da 180º e quindi (I) le geodetiche corrispondenti *r'p'*, *r'q '*formano in *r '*un angolo purê differente da 0º e da 180º. Dunque se Le geodetiche *r'p'*, *r'q'* si dicono *parallele a*llá *p'q'*, in quanto segnano Il trapasso dalla schiera di quelle che intersecano La *p'q'* allas chiera di quelle che non la intersecano, si può enunciare Il risultato dicendo che: da ogni punto (reale) della superficie si possono sempre condurre *due* geodetiche (reali) parallele ad una medesima geodetica (reale) che non passi per quel punto, e queste due geodetiche fanno tra loro um angolo differente tanto da 0º quanto da 180º [...]. Per iscorgere subito, nella geometria pseudosferica, l'interpetrazione di qualche altra affermazione della geometria non-euclidea, consideriamo un triangolo geodetico."

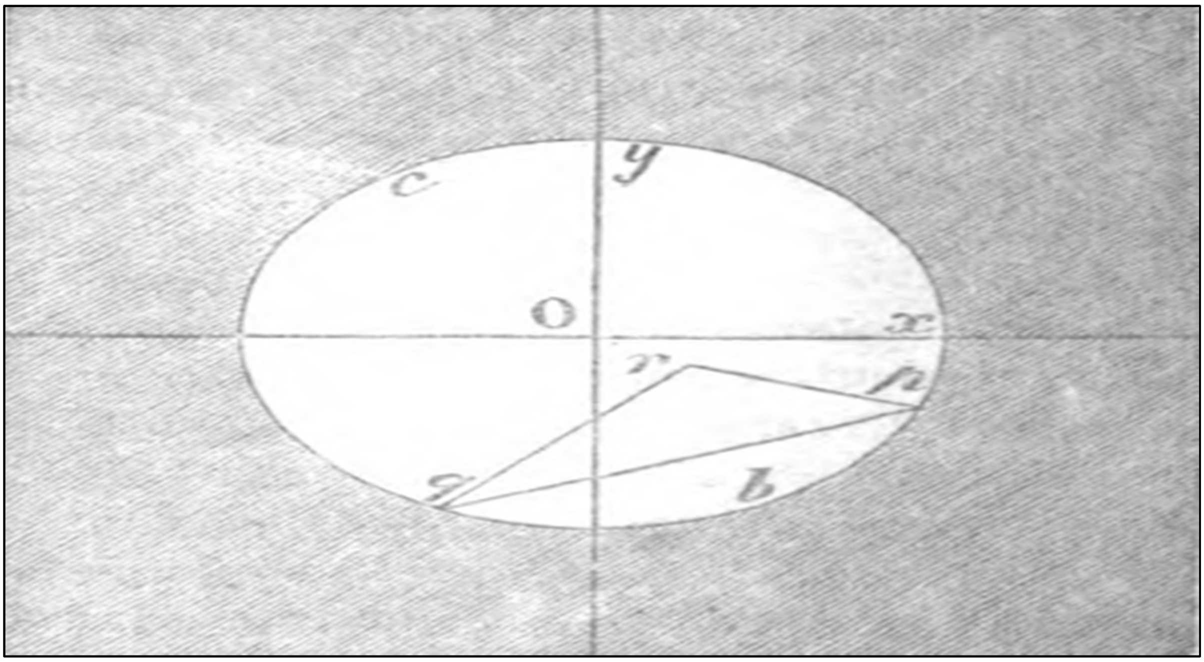


Figura 5

A geometria hiperbólica, quando representada em um plano bidimensional, é consoante à geometria plana, uma vez que obteríamos um triângulo com ângulos diferentes de 0 e de 180 graus. A variação hiperbólica dos ângulos de um triângulo hiperbólico é representada analogamente – no plano bidimensional – por meio de uma assimetria entre os ângulos, sem que haja prejuízo para o cálculo. Logo, conforme Beltrami, o triângulo *pqb* supracitado seria representado curvilineamente da seguinte maneira:

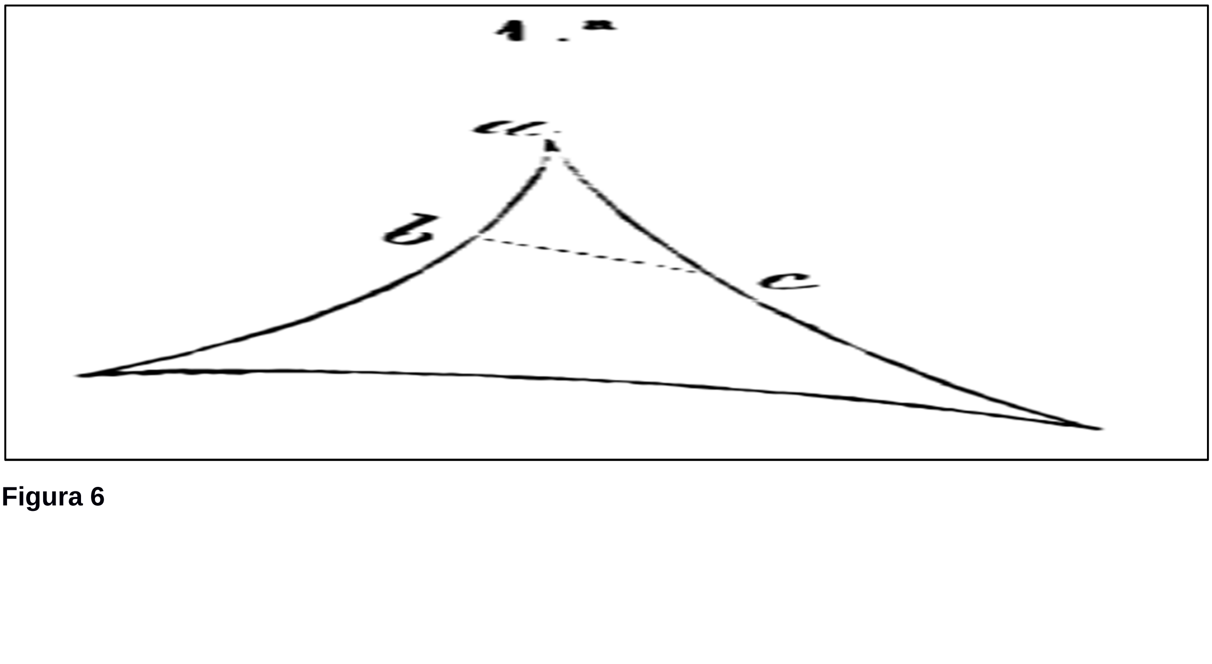


Figura 6

A respeito desta representação (curvilínea) Beltrami afirma que o referido triângulo possuiria intervalos (a,b; b,c) que se relacionariam ao infinito, ao passo que no triângulo plano anteriormente citado tal relacionamento seria finito.[104] Já se construirmos um triângulo plano no interior de uma superfície geodésica, obtemos a seguinte representação:

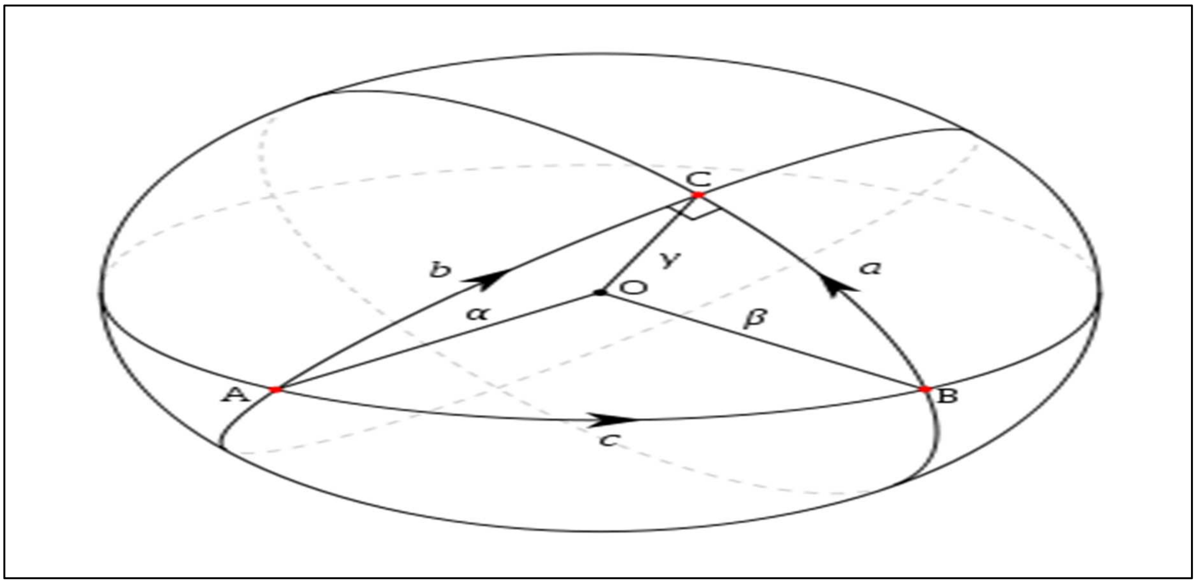


Figura 7

As geodésicas A, B e C seriam delimitantes na construção de um triângulo plano (α, β, γ), sendo que c é o círculo limite. Desta maneira, Beltrami parece estar correto quando afirma que, em um plano 2D a geometria hiperbólica concorda com a euclidiana.[105] Concordância esta que não se estende ao espaço tridimensional e que, portanto, configura a inadequação da concepção hiperbólica em relação à estrutura cognitiva humana. Logo, podemos pensar uma geometria hiperbólica – ou mesmo, elíptica – mas tal representação mental não corresponde à nossa experiência espacial real, experiência esta na qual Kant focava seu sistema epistemológico.

[104]Cf. BELTRAMI, 1868, p.11.
[105] Vale ressaltar que o matemático italiano utiliza um modelo Riemanniano, i. e, elíptico, para sobrepor à geometria hiperbólica. Para uma melhor compreensão ver: ARCOZZI, 2012, p. 7. “He had probably worked out the analogous expression [...] for the negative curvature case, but he did not write it in the article *per abbreviare il discorso,*"for the sake of brevity" [...] Beltrami also mentions [...] that [...] can be obtained from [...] by changing *a* and *R* in their imaginary counterparts *ia* and *iR*, according to the general euristic principle we have already mentioned, that hyperbolic geometry is spherical geometry on a sphere of imaginary radius. Since the equations of the geodesics are the same in both the real and in the imaginary case, the geodesics with respect to the coordinates *u v* are straight lines. Hence, they are chords of the limiting circle.”

3.2 A física de Einstein

O advento da física einsteiniana – calcada sobre a Teoria da Relatividade – certamente estabeleceu um novo paradigma de ciência.[106] Contudo, isso não significa que Newton estivesse completamente errado ou que suas leis não tenham aplicação prática na vida cotidiana. Neste ponto ocorre um caso análogo às geometrias não euclidianas. Do mesmo modo que podemos pensar geometrias elípticas ou hiperbólicas sem alterar nossa percepção euclidiana do mundo, podemos igualmente utilizar o modelo einsteiniano em relação ao macrocosmo sem que isso altere as leis básicas que regem a física no âmbito do cosmo (objetos de tamanho médio), i.e., da nossa experiência ordinária que compõem o fenômeno que, por sua vez, eram a preocupação de Kant. Os fenômenos da física einsteiniana só podem ser observados em situações ideais de experimentação, i.e., tais fenômenos são teoricamente possíveis e, para fins de corroboração empírica, requerem a utilização de um aparato científico artificial. Assim, a física de Einstein não é aquela que eu e você utilizamos como referência em nossas experiências cognitivas comuns. Outrossim, cabe ainda ressaltar que a teoria einsteiniana não pôde unificar a física, de modo que, por mais proeminente e verídica que a teoria da relatividade possa ser, ela ainda não fornece todas as respostas para a totalidade da física. Nossa experiência sensorial continua se adequando às Leis de Newton. Contudo, precisa-se ter em mente que o próprio Kant problematizava algumas noções fundamentais da concepção de Newton, entre elas, as ideias de espaço e tempo enquanto realidades absolutas e, por assim dizer, heterônomas. O filósofo alemão estava ocupado com a experiência possível de criaturas as quais necessitam de sensibilidade para obter conhecimento e, em virtude disso, são limitadas pelas fronteiras dessa mesma sensibilidade. Vejamos uma importantíssima nota de rodapé extraída do texto de Hanna:

> Noumena negativos incluem, entre outras coisas, o espaço e o tempo absolutos de Newton, todos os espaços não euclidianos ou entidades espaciais não euclidianas e qualquer entidade ou estrutura temporal que envolva um espaço anormal - e.g. tempo não assimétrico ou reversível, tempo de laço *[looping time],* tempo descontínuo, tempos múltiplos ou paralelos, etc.De modo mais geral, noumena negativos são exteriores à nossa sensibilidade. Todavia, isso deixa aberta a

[106] Para uma maior compreensão da física einsteiniana ver: EINSTEIN, 1997, p. 146; conferir também: VALTONEN, 2016, p. 43.

> possibilidade de que eles sejam cognitivamente acessíveis a criaturas alienígenas com formas diferentes de sensibilidade [...].[107]

Hanna claramente faz uma leitura arguta do problema do modelo epistemológico kantiano frente às novas descobertas científicas. Os chamados noumena negativos fazem referência a eventos que ocorrem fora de nossa sensibilidade – ou seja, escapam à nossa capacidade cognitiva – uma vez que não podem ser constatados sensorialmente por seres dotados de razão e sensibilidade, as quais perfazem o universo limítrofe da experiência possível. A experiência humana cotidiana em relação ao mundo não permite a constatação de realidades espaço-temporais excêntricas. A possibilidade teórica – ou real em condições artificiais e ideais de experimentação – em nada ameaça a filosofia kantiana, a qual, por sua vez, ocupa-se justamente com a possibilidade real do conhecimento – i.e., está epistemologicamente fundada na síntese sensório-racional da qual o agente cognoscente humano é portador.

[107] HANNA, 2001, p. 106. "Negative noumena include, among other things, Newtonian or absolute space and time, all non-Euclidean spaces or non-Euclidean spatial entities, and any temporal entity or time structure that involves a deviant time—e.g. non-asymmetric or reversible time, looping time, discontinuous time, multiple or parallel times, etc. More generally, negative noumena fall outside our sensibility. This leaves open the possibility, however, that they are cognitively accessible to alien creatures with different forms of sensibility [...]."

4. O Esquematismo Kantiano

A explicação kantiana sobre o esquematismo dos conceitos puros do entendimento, conforme apresentada na KrV lança muitas luzes na compreensão da dedução transcendental, a qual possibilita a construção de objetos no espaço e no tempo. Kant ao questionar a possibilidade de subsumirmos as intuições nos conceitos, está abrindo o caminho para a explanação pormenorizada da “possibilidade de aplicarmos aos fenômenos em geral os *conceitos puros do entendimento”*[108]*.*

O esquema transcendental surge como um “terceiro termo” que seja homogêneo à categoria (conceito) e ao fenômeno. Kant diz que tal “representação mediadora deve ser pura (sem nada de empírico) e, todavia, por um lado, intelectual e, por outro sensível”[109]. Este terceiro termo, o qual sintetiza intelectualidade e sensibilidade, conjuga o conceito puro do entendimento, o qual “contém a unidade sintética pura do diverso em geral”[110] com o tempo que, por sua vez, é uma “condição formal do diverso no sentido interno, e, portanto, da ligação de todas as representações”[111] e que “contém um diverso *a priori* na intuição pura”[112].

A partir disso, o tempo pode ser transcendentalmente determinado a partir da identicidade do mesmo com sua categoria, categoria esta que perfaz sua unidade em vista de ser universal e fundado sobre uma regra apriorística. Do mesmo modo em que o tempo é idêntico à categoria, ele é idêntico ao fenômeno, haja vista que todos os fenômenos (representações empíricas do objeto) contem o tempo. Temos, assim, um conceito intelectual de tempo e um conteúdo temporal sensível, ambos constituintes de duas esferas cognitivas a serem conjugadas e unificadas de maneira que o conteúdo seja posto na categoria, ou, nas palavras de Kant: “a subsunção dos fenômenos na categoria”[113].

Young afirma que:

[108] KrV A138/B177. “How, then, is the subsumption of intuitions under pure concepts, the application of a category to appearances, possible? […].”
[109] Ibid. “[…] This mediating representation must be pure, that is, void of all empirical content, and yet at the same time, while it must in one respect be intellectual, it must in another be sensible.”
[110] Ibid. “[...] contains pure synthetic unity of the manifold in general […].”
[111] Ibid. [...] formal condition of the manifold of inner sense, and therefore of the connection of all representations […].”
[112] Ibid. “[...] contains an a priori manifold in pure intuition.”
[113] Op. Cit. A139/B178. “[...] the subsumption of the appearances under the category.”

> A conexão entre intuição e sensibilidade deriva não do conceito de intuição sozinho, mas do que Kant considera ser uma limitação inerente à inteligência [...] humana, ou seja, que ela só pode representar coisas particulares se for sensivelmente afetada.[114]

A sensibilidade ocupa um papel central na dedução transcendental, uma vez que o único meio para que os objetos nos sejam dados é através de uma modificação da sensibilidade. Nesse procedimento, os conceitos puros *a priori* precisam necessariamente englobar duas características fundamentais, a saber: a) conter a função do entendimento na categoria e; b) e as condições formais da sensibilidade; estas últimas – enquanto sentido interno – constituem os *esquemas* e são a condição geral que permite a aplicação da categoria ao objeto e que delimita a aplicação do conceito puro do entendimento. Surge, a partir disso, o“esquematismo do entendimento puro”[115]. Enquanto processo de operação com esses esquemas. Kant explica a diferença entre *esquema* e *imagem,* diferença esta que é fundamental para a sua filosofia da matemática:

> O esquema é em si mesmo sempre um produto da imaginação. Entretanto, como a síntese da imaginação não visa nenhuma intuição especial, mas apenas a unidade na determinação da sensibilidade, o esquema deve ser distinguido da imagem. Se cinco pontos forem colocados um ao lado do outro, assim, ..., eu tenho uma imagem do número cinco. Mas se, por outro lado, eu penso apenas num número em geral, seja cinco ou cem, esse pensamento é mais a representação de um método pelo qual uma multiplicidade, por exemplo mil, pode ser representada em uma imagem em conformidade com um certo conceito, do que a própria imagem. Pois com um número como mil a imagem dificilmente pode ser pesquisada e comparada com o conceito.[116]

[114] YOUNG, 1992, p. 160. “The connection between intuition and sensibility derives, not from the concept of intuition alone, but from what Kant takes to be an inherent limitation of human […] intelligence, viz., that it can represent particular things only trough being sensibly affected.”
[115] Op. Cit. A140/B179. “[...] schematism of pure understanding […].”
[116] Ibid. The schema is in itself always a product of imagination. Since, however, the synthesis of imagination aims at no special intuition, but only at unity in the determination of sensibility, the schema has to be distinguished from the image. If five points be set alongside one another, thus, ….., I have an image of the number five. But if, on the other hand, I think only a number in general, whether it be five or a hundred, this thought is rather the representation of a method whereby a multiplicity, for instance a thousand, may be represented in an image in conformity with a certain concept, than the image itself. For with such a number as a thousand the image can hardly be surveyed and compared with the concept.

Essa importante passagem da KrV revela o papel geral da síntese da imaginação, a qual tem em vista unicamente prestar suporte – por meio da unidade na determinação - à sensibilidade. Ora, se o *esquema* advém da imaginação, a sensibilidade apresenta a *imagem.* A representação de um número específico na sensibilidade gera uma imagem do mesmo número, mas ao meramente pensarmos um número qualquer, tal pensamento na verdade representa um *método de representação de um conjunto* conforme um determinado conceito. Nesse ponto Kant deixa explícito que sua filosofia da matemática, ao contrário das críticas logicistas, pode lidar com números grandes. Ele utiliza como exemplo o número 1000 (mil), mas poderia utilizar 1000.000 (um milhão) ou ainda 5.456.227.000 (cinco bilhões, quatrocentos e cinquenta e seis milhões, duzentos e vinte e sete mil) visto que tais números constituem conceitos que podem ser representados por um método para representar um conjunto, conjunto este que não é delimitado por nenhuma apreensão empírica. Ora, tal método de representação constitui um *esquema* que expande infinitamente a possibilidade do cálculo matemático a partir do viés da filosofia kantiana da matemática, i.e., não logicista. Assim, o esquema de um conceito 5.456.227.000 adquire sua imagem por meio de “uma representação de um processo universal da imaginação”[117]. Desse modo, nossa capacidade de representarmos a imagem de um número não fica limitada à nossa capacidade de visualizarmos números empiricamente, como também, podemos representar imagens de números extremamente grandes por meio de um procedimento epistemicamente fundado e, logo, não meramente formal.

Winterbourne ressalta muito apropriadamente o papel da *imaginação* no processo de construção kantiano:

> A ideia de construção é muito mais ampla e de significado mais geral em Kant do que o foco em sua filosofia da matemática pode sugerir. Inicialmente está localizado dentro de tal estrutura, mas é generalizado como o processo de ‘síntese do múltiplo empírico’ [...]. Esta síntese, [...] fornece o elemento pressuposicional ou transcendental por meio da ‘imaginação’. A conexão entre conceitos e intuições é efetuada por meio de uma síntese de que o esquematismo é o exemplo focal.[118]

[117] Id. A140/B180. ”[…] representation of a universal procedure of imagination […].”
[118] WINTERBOURNE, 1990, p.112. “The idea of construction is much wider and of more general significance in Kant than focusing on his philosophy of mathematics may suggest. It is initially located inside such a framework, but is generalized as the process of 'synthesis of the empirical manifold' […]. This synthesis, […] provides the presuppositional or transcendental element by means of ‘imagination.’

A imaginação constitui o elemento basilar para o esquematismo, uma vez que é ela que fornece o elemento transcendental para a construção. Embora o foco dado pela filosofia da matemática kantiana para a ideia de construção seja - conforme Winterbourne – restrito, veremos que tal construção por meio da imaginação explica a síntese entre os conceitos puros do entendimento e as formas puras a priori da intuição. A imagem de um número é dada pela "síntese imaginativa"[119], i.e., pela regra da síntese na imaginação, à qual aplica os conceitos (esquemas) às imagens a fim de que aja uma construção iterativa via intuição pura do espaço e do tempo enquanto formas da sensibilidade. Assim, a matemática não precisa lidar diretamente com o mundo empírico fenomênico a fim de se manter *a priori,* universal e necessária.

Kant afirma que os conceitos sensíveis puros têm por base os esquemas e as imagens, o que traz implicações diretas para a geometria, uma vez que para um conceito geométrico "nenhuma imagem seria jamais adequada"[120]. Conceitos geométricos tais como o triângulo em geral não poderiam alcançar, através da imagem, o requisito *sine qua non* da universalidade que possibilitaria a validação do triângulo em geral para todos os triângulos de "ângulo reto, ângulo obtuso ou ângulo agudo"[121]. É a regra da síntese da imaginação voltada para figuras no espaço que permite pensarmos um triângulo, de modo que este possui existência somente no pensamento.

Riccardo Pinosio afirma que:

> No entanto, é claro que, para que uma experiência objetiva seja possível, uma unidade estável da consciência é exigida, a qual necessariamente deve ser capaz de acompanhar todas as minhas representações possíveis de tal modo que todas elas sejam concebidas como minhas, i.e., que a identidade da consciência que acompanha essas representações seja pensada. A fonte dessa unidade original da consciência, que Kant denota com vários termos - como 'unidade transcendental da apercepção' e 'unidade original de síntese da apercepção' - é o original que *Eu penso*, ou apercepção pura, que então deve preceder todos os dados dos sentidos ou intuição, uma vez que nunca poderia surgir a partir dessas representações sempre fugazes [...].[122]

The connection between concepts and intuitions is effected by means of a synthesis of which the schematism is the focal example."

[119] Ibid. "[...] imaginative synthesis […]".

[120] Ibid. A141/B180. "No image could ever be adequate […]".

[121] Ibid. "[…] right-angled, obtuse-angled, or acute angled […]".

[122] PINOSIO, 1987, p. 17. "It is, however, clear that in order for an objective experience to be possible, a stable unity of consciousness is demanded, which must necessarily be able to accompany all of my

No tocante à experiência em relação ao mundo externo, a *unidade transcendental da apercepção* é o elemento que precede todos os elementos oriundos da experiência. Já no caso da matemática pura, para a qual não é requerida nenhuma experiência, mas tão somente a construção via conceitos puros do entendimento e as formas puras da intuição, é a mesma unidade da apercepção que permite que as intuições puras do espaço e do tempo possam ser unificadas em um conjunto congruente que nos permite a construção numérica e aritmética a partir de elementos estáveis, possibilitando, assim, uma construção *a priori,* universal e necessária.

Desse modo, a empiria igualmente não nos fornece o substrato para um conceito válido, visto que os objetos da experiência e suas imagens apontam sempre e de maneira imediata ao *esquema da imaginação* enquanto *regra de determinação da nossa intuição* conforme um determinado *conceito geral.* A regra da síntese da imaginação atua como reguladora da atuação da intuição pura do espaço e do tempo.

Fica clara, novamente, a posição kantiana a respeito do papel do sujeito cognoscente frente ao múltiplo advindo dos sentidos. A mente humana desempenha um papel ativo por meio do esquematismo enquanto determinante da intuição sensível. Um conceito geométrico *a priori* e universalmente válido só pode ser dado através de esquemas e imagens gerados a partir da estrutura cognitiva mental, a qual por sua vez é sintética e, através da imaginação e da intuição, é ativa na construção matemática. Não obstante, Kant define o esquematismo do entendimento frente aos fenômenos e às suas formas como:

> [...] uma arte escondida nas profundezas da alma humana, cujos modos reais de natureza de atividade dificilmente nos permitirão descobrir e abrir-se ao nosso olhar. Podemos afirmar apenas que: a imagem é um produto da faculdade empírica da imaginação reprodutiva; O esquema dos conceitos sensíveis, como o das figuras no espaço, é um produto e, por assim dizer, uma monograma da imaginação pura *a priori*, através do qual e de acordo com o qual as imagens se tornam elas próprias possíveis.[123]

possible representations in such a way that they are all conceived as mine, i.e., that the identity of the consciousness accompanying these representations be thought. The source of this original unity of consciousness, which Kant denotes with various terms - such as ‘transcendental unity of apperception’ and ‘original-synthetic unity of apperception’ - is the original I think, or pure apperception, which must then itself precede every data of sense or intuition, since it could never arise from these always fleeting representations […].”

[123] Op. Cit. A141/B180. “[…] an art concealed in the depths of the human soul, whose real modes of activity nature is hardly likely ever to allow us to discover, and to have open to our gaze. This much only we can assert: the image is a product of the empirical faculty of reproductive imagination; the schema

Na passagem acima vemos Kant tratando o esquematismo – e logo, a intuição pura – como *uma arte escondida nas profundezas da alma,* arte esta da qual as origens mentais não estão acessíveis a nós. Certamente este constituiu um ponto forte para a crítica logicista, a qual não poderia operar a redução da matemática à lógica por meio de um expediente misterioso e obscuro. Tal crítica certamente é compreensível, de modo que a intuição pura e o esquematismo não serviriam para a fundamentação de uma concepção matemática cientificamente organizada. Disso decorre a necessidade de os logicistas estipularem – ainda que arbitrariamente – a lógica como base de todo cálculo possível e, portanto, prescindirem dos elementos aos quais eles chamavam de psicológicos, elementos estes que faltam à teoria logicista no âmbito da epistemologia a nível mental. O logicismo não operava neste âmbito e sua teoria, tomada isoladamente, obtém sucesso. A questão que os logicistas falharam em perceber é a de que a intuição pura e o esquematismo mereciam uma maior consideração no tocante à incapacidade de Kant em demonstrar por meio de critérios propriamente científicos o processamento da matemática na alma, i.e., na mente humana. Kant não possuía os meios necessários para isso, mas, no entanto, estava correto em sua epistemologia matemática dada pela intuição pura do espaço e do tempo e pelo esquematismo, ainda que sem poder demonstrá-los e rastreá-los até suas fontes primitivas.

Michael Friedman, em sua obra *Kant and exact sciences* afirma que:

> No entanto, tem havido uma tendência marcada para minimizar e mesmo para descartar a relevância filosófica do envolvimento de Kant com a ciência contemporânea, particularmente entre os comentaristas de língua inglesa do século XX. A razão para isso não está muito distante: ler Kant, em estreita ligação com as especificidades da matemática e da física de seu tempo, seriam vistas proposições não formuladas na lógica quantificacional moderna, mas sim por operações construtivas - gerando linhas, círculos e assim por diante na geometria - que podem ser iteradas indefinidamente.[124]

of sensible concepts, such as of figures in space, is a product and, as it were, a monogram, of pure a priori imagination, through which, and in accordance with which, images themselves first become possible.”

[124] FRIEDMAN, 1992, p. xiii. “Yet there has been a marked tendency to downplay and even to dismiss the philosophical relevance of Kant's engagement with contemporary science, particularly among twentieth-century English-language commentators. The reason for this is not far to seek: to read Kant in close connection with the specifics of the mathematics and physics of his time would seem propositions formulated in modern quantificational logic but rather by constructive operations-generating lines, circles, and so on in geometry - which can then be iterate indefinitely.”

A estranheza que um leitor habituado com a lógica quantificacional tem ao ler Kant, certamente o conduz a tê-lo como ultrapassado e, portanto, sem relevância para a teoria matemática moderna. Mas, faz-se necessário que se reitere a correção de Kant no que tange à intuição pura e, bem como, o caráter meramente formal e simbólico da lógica quantificacional. Kant ainda tem algo a nos dizer sobre o processo mental de cálculo matemático, basta que o escutemos e que estejamos dispostos a reconsiderar sua teoria a partir da ciência contemporânea.

Desse modo, hoje podemos revisitar a teoria kantiana e buscar por fundamentos científicos para aquilo que foi afirmado por Kant. Essa questão – a da validade atual – ainda que restrita - da teoria kantiana será melhor abordada no último capítulo do presente trabalho.

4.1 Aritmética e construtivismo

A intuição pura possui muitas nuances e especificidades para poder realizar seu papel de condição de possibilidade e de fornecedora de objetividade às experiências epistêmicas e matemáticas. Precisamos analisar com mais cuidado sua capacidade de proporcionar juízos sintéticos *a priori* na matemática, mais especificamente, sua prerrogativa de separar as possibilidades reais das possibilidades lógicas.[125] É nesse sentido que Friedman afirma que as "possibilidades reais seriam apenas uma subclasse da classe muito mais ampla das possibilidades lógicas"[126]. Como poderia a intuição pura selecionar as experiências realmente possíveis a partir das experiências logicamente possíveis? E, de que maneira, ela poderia fornecer verdades matemáticas anteriormente a qualquer experiência? E, se tais verdades são de fato – universais e necessárias – como tal intuição pode fornecer verdades matemáticas compartilhadas, i.e., válidas para todos os membros da espécie humana?

Explicar a maneira pela qual a intuição pura poderia operar tal seleção e o modo pelo qual temos acesso cognitivo a ela é uma das preocupações fundamentais

[125] Cf. FRIEDMAN, 1990, p. 218.
[126] FRIEDMAN, 1990, p. 219. "[…] the real possibilities are a subclass of the much wider class of logical possibilities […]."

de Michael Friedman. Vale relembrar que Kant tem a geometria euclidiana como um pressuposto fundamental, de modo que intuição pura matemática gera regras matemáticas apodíticas e universais que coincidem com os postulados de Euclides.

Dado tal pressuposto, permanece a questão relativa à dificuldade de demonstrarmos o modo pelo qual a *intuição pura*, enquanto capacidade cognitiva secundária em relação ao entendimento poderia *excluir estados de coisas desviantes* os quais, no entanto, nos são dados pelo entendimento enquanto faculdade calcada sobre a lógica geral.[127] Ora, isso significa que “apesar de podermos pensar tais estados de coisas desviantes, nós não podemos intuí-los ou imaginá-los”[128]. A possibilidade lógico-cognitiva (entendimento) não implica a possibilidade transcendental real (intuição pura). Desta maneira, "o suposto caráter a priori da matemática torna-se absolutamente ininteligível”[129]. O entendimento pode pensar qualquer coisa em relação a qualquer objeto, mas, isso não significa que o conteúdo desse pensamento possa constituir uma experiência relacionada com o mundo, i.e., uma experiência objetivamente válida, uma vez que é a intuição pura que fornece a base formal necessária para a construção de juízos matemáticos objetivos, necessários e, portanto, compartilhados por todos os seres racionais.

Apresentada deste modo, a situação parece requerer que aceitemos a intuição pura sem nenhum tipo de questionamento, dado que ela própria seria uma espécie de petição de princípio e, logo não poderia validar apoditicamente os juízos matemáticos. Contudo, Friedman propõe uma interpretação que escapa a tal relativismo e, ao mesmo tempo, mantém-se fiel aos escritos kantianos. O autor propõe que, para podermos compreender a intuição pura devemos retirar nosso foco da ciência da geometria e concentrarmo-nos na aritmética.

Parece aceitável afirmarmos que a intuição pura do *espaço* seria a condição de possibilidade da geometria. Mas, se afirmarmos que a intuição pura do *tempo* seria o pressuposto da aritmética, teríamos de enfrentar o fato de que Kant "de fato não disse que aritmética está para o tempo da mesma forma que a geometria está para o

[127] Cf. Ibid. “[...] to rule out […] deviant states of affairs […].”
[128] Ibid. “[…] Although we can think such deviant states of affairs, we cannot intuit or imagine them […].”
[129]Id. p. 220. “The assumed a priori character of mathematics thereby itself becomes absolutely unintelligible.”

espaço"[130]. Kant em nenhum momento associa diretamente a *aritmética* à intuição pura do tempo. Vejamos:

> Na Estética Transcendental, Seção 5 (A Exposição Transcendental do Conceito de Tempo) corresponde à Seção 3 (A Exposição Transcendental do Conceito de Espaço), na qual o conhecimento sintético *a priori* da geometria é explicado em termos da intuição pura do espaço. Na Seção 5, porém, a aritmética não é mencionada; pelo contrário, a ciência sintética *a priori* da qual a possibilidade pode ser explicada pela intuição pura do tempo é identificada como "a doutrina geral do movimento" (B49). A mesma ideia é encontrada na *Dissertação Inaugural* (1770), Seção 12: "A MATEMÁTICA PURA considera o *espaço* na GEOMETRIA, o *tempo* na MECÂNICA pura" e nos *Prolegômenos*, Seção 10: "acima de tudo, porém, a mecânica pura pode obter seu conceito de movimento somente por meio da representação do tempo" [...]. Para Kant, a ciência do tempo não é, portanto, a aritmética, mas sim, a mecânica pura ou a doutrina pura do movimento.[131]

Conforme tal interpretação, embora a aritmética envolva o tempo, Kant não a associou diretamente e imediatamente com o mesmo. Diferentemente da intuição pura do *espaço* – a qual de fato fornece um modelo para a geometria – "a intuição pura do tempo não constitui um modelo para a aritmética"[132]. Esta ciência necessita de uma unidade especial a qual permita uma *função de sucessão* (*sucessor function*), unidade esta que não pode ser encontrada no *tempo* tomado em si mesmo. Deste modo, existe uma profunda diferença entre *números* e *alterações,* e são estas, as alterações que são baseadas na *intuição de movimento* pertencentes à seara da *mecânica pura*, a qual de fato utiliza a *intuição pura do tempo*.

A fim de compreendermos o processo kantiano de justificação da matemática, precisamos lançar novamente um olhar sobre a diferença estabelecida por Kant entre as noções de *Quantum* e *Quantität e* a *ostensividade* e o *simbolismo*

[130] Id. p. 221. "[...] Kant does not in fact say that arithmetic stands to time as geometry does to space [...]."
[131] Ibid. "[...] In the Transcendental Aesthetic, Section 5 (The Transcendental Exposition of the Concept of Time) corresponds to Section 3 (The Transcendental Exposition of the Concept of Space), where the synthetic *a priori* knowledge of geometry is explained in terms of the pure intuition of space. In Section 5, however, arithmetic is not mentioned; instead, the synthetic *a priori* science whose possibility is explained by the pure intuition of time is identified as 'the general doctrine of motion' (B49). The same idea is found in the *Inaugural Dissertation* (1770), Section 12: 'PURE MATHEMATICS considers *space* in GEOMETRY, *time* in pure MECHANICS', and in the *Prolegomena*, Section 10: 'above all, however, pure mechanics can attain its concepts of motion only by means of the representation of time'. The science of time, for Kant, is therefore not arithmetic, but rather pure mechanics or the pure doctrine of motion."
[132] Ibid. "[...] the pure intuition of time does not constitute a model for arithmetic [...]."

respectivamente.[133] A *geometria* lida com objetos, i.e., com magnitudes e, portanto, com a ostensividade. Já a *aritmética*, por sua vez, consiste em uma abstração realizada das grandezas geométricas e, portanto, constitui um expediente simbólico – o qual tem a função de elevar os *Quantum* obtidos na intuição geométrica a um maior nível de abstração.

A *aritmética* pode ser dividida em dois momentos distintos, a saber, a *álgebra* e a *aritmética*. A primeira é denominada de *aritmética geral* uma vez que lida com uma "classe mais geral de magnitudes"[134]. Já na aritmética dos números a "relação da magnitude para com a unidade é determinada"[135], ao passo que na álgebra – ou aritmética geral – pode-se trabalhar com magnitudes indeterminadas. Logo, apesar de as duas espécies de aritmética supracitadas constituírem uma ciência de cunho mais abstrato do que a geometria, Friedman salienta muito bem as diferenças existentes entre ambas. A álgebra constitui aquilo que poderíamos chamar de uma *meta-aritmética*, visto que nela as magnitudes podem ser simbolizadas sem uma relação direta com os números, mas apenas numa relação representacional na qual as magnitudes são simbolizadas uma em relação à outra. Friedman afirma que:

> Em sua carta a Rehberg, Kant argumenta que o entendimento pode pensar 'o mero conceito da raiz quadrada de um número positivo = √α conforme ela é representada na álgebra' (*Ak.* 11, 208. 32-33) e, de fato, pode pensar tal raiz 'na série numérica, entre dois de seus termos' (*Ak.* 11, 208.19). A raiz quadrada de α pode sempre ser pensada como 'o meio geométrico proporcional entre 1 e α'por meio da 'equação 1:x = x:α' (*Ak.* 11, 207. 31-32). Essa equação, todavia, não dá à raiz uma relação determinada para com a unidade, uma vez que sabemos apenas que as duas relações 1:x = x:α são iguais [...].[136]

[133] Cf. *KrV* A717/B745. "But mathematics does not only construct magnitudes (quanta) as in geometry; it also constructs magnitude as such (quantitas), as in algebra. In this it abstracts completely from the properties of the object that is to be thought in terms of such a concept of magnitude. It then chooses a certain notation for all constructions of magnitude as such (numbers), that is, for addition, subtraction, extraction of roots, etc. Once it has distinguished in the universal concept of magnitudes the different relations in which the magnitudes may stand, it exhibits in intuition, in accordance with certain universal rules, all the various operations through which the quantities are produced and modified. When, for instance, one quantity is to be divided by another, their symbols are placed together, in accordance with the sign for division, and similarly in the other processes; and thus in algebra by means of a symbolic construction, just as in geometry by means of an ostensive construction (the geometrical construction of the objects themselves), we succeed in arriving at results which discursive knowledge could never have reached by means of mere concepts."

[134] FRIEDMAN, 1990, p. 224. "[…] more general class of magnitudes […]."

[135] Ibid. "[…] the ratio of the magnitude to unity is determinate […]."

[136] Id. p. 225. "[...] In his letter to Rehberg, Kant argues that the understanding can think 'the mere concept of a square root of a positive number = √ α as it is represented in algebra' (*Ak.* 11, 208. 32-33) and, indeed, can think such a root 'in the number series, between two of its terms' (*Ak.* 11, 208.19). Specifically, the square root of α can always be thought as 'the mean geometrical proportional between

Seguindo o caminho apontado por Friedman, podemos afirmar que a expressão "relação determinada para com a unidade"[137] significaria – para Kant – "relação racional para com a unidade"[138]. Ao falar em *relação racional* Friedman traz à tona a ideia de que o fato de duas grandezas serem incomensuráveis não implica de forma alguma que elas não possuam uma relação definida. É por esse motivo que o entendimento, apesar de poder definir o conceito de √2, não pode alcançar o "conceito completo de número *[vollständigerZahlbegriff]*"[139] a não ser por meio de uma regra de aproximação contínua. Isto é, a intuição numérica não é capaz de fornecer o conceito da *Quantität* irracional de √2, de maneira que tal grandeza fica relegada à construção geométrica, a qual demonstra que tais magnitudes "não são meramente pensáveis, mas devem ser dadas adequadamente na intuição"[140], para que se possa, então, chegar ao resultado irracional (1.414213562373095) .

Neste ponto, chegamos ao desenlace da argumentação de Friedman quanto ao papel da intuição pura na matemática kantiana. A distinção entre *Quantum* e *Quantität* se torna mais expressiva e auxilia-nos a compreender as diferenças entre a álgebra e a aritmética. Vejamos:

> Exatamente como em Euclides, Kant vê os objetos da teoria da magnitude - a teoria geral de magnitudes (racionais ou irracionais) e a teoria especial de magnitudes numéricas - como dados independentemente, a partir de fora da própria teoria, por assim dizer. Tais objetos são concebidos primeiramente enquanto magnitudes espaciais, tais como: comprimentos, áreas e volumes, os quais são independentemente fornecidos pela ciência da geometria. A teoria da magnitude toma tal objeto fornecido de maneira independente - um determinado seguimento finito de linha, por exemplo - como input e apresenta uma resposta definida para a questão 'Qual é a magnitude deste objeto?' como output. Isso é realizado por meio da escolha arbitrária de uma unidade para a magnitude em questão (assim, se a magnitude for a diagonal de um quadrado, digamos, nós poderíamos escolher o lado do quadrado como unidade) e, então, por meio de cálculo, tentar expressá-la como uma soma de tais unidades. Se a magnitude e a unidade forem proporcionais, a aritmética produz um determinado número inteiro ou fração; se não forem proporcionais, a álgebra (a teoria das relações) permite-nos, todavia, encontrar uma

1 and α' via 'the equation 1:x = x:α' (*Ak.* 11, 207. 31-32). This equation, however, does not give the root a determinate ratio to unity, for we know only that the two ratios 1:x and x:α are equal [...]."

[137] Ibid. "[...] determinate ratio to unity [...]."

[138] Id. p. 226. " [...] rational ratio to unity [...]."

[139] Id. p. 226. "[...] complete number-concept [*vollständigerZahlbegriff*] [...]."

[140] Ak.II, 210.16-23. Apud: FRIEDMAN, 1990, p. 226. "[...] not merely thinkable, but are also to be given adequately in intuition."

> regra definida de aproximação por meio de números (inclusive frações), uma regra de aproximação que pode ser tão elaborada quanto se deseje.[141]

Nesta interessante e reveladora passagem notamos uma chave de leitura bastante eficaz para o problema da fundamentação da aritmética. A base de toda aritmética possível (aritmética dos números e álgebra) seria, em Kant, a geometria. De acordo com tal leitura, a construção geométrica *(ostensiva)* – enquanto ciência independente – forneceria os dados espaciais, i.e., concretos (*comprimentos, áreas e volumes*), os quais seriam tomados pela teoria da magnitude e, em um segundo momento, submetidos à abstração que visa decodificá-los por meio da simbolização aritmética ou algébrica.

Friedman aponta para o fato de a álgebra e a aritmética não possuírem uma seara específica como possui a geometria. Álgebra e aritmética são "técnicas de cálculo"[142] que possuem um objeto que lhes é dado pela ciência independente da geometria. Assim, a teoria da magnitude (álgebra e aritmética) não leva em consideração questões de cunho ontológico a fim de determinar uma grandeza, uma vez que seu procedimento consiste em uma abstração que busca traduzir as intuições espaciais em uma linguagem que permita uma maior compreensão e manipulação dos dados fornecidos por tais intuições.

Delineia-se, deste modo, a diferenciação entre as noções de *Quantum* e de *Quantität,* tão caras para a filosofia da matemática kantiana. O Quantum corresponde a "objetos da intuição enquanto magnitudes,são as magnitudes particulares"[143], as quais são construídas a partir da geometria euclidiana. Já o conceito de *Quantität* é "o conceito de coisa em geral através da determinação da magnitude"[144] e "abrange as

[141] FRIEDMAN, 1990, p. 227. "[...] Just as in Euclid, Kant sees the objects of the theory of magnitude, both the general theory of (rational or irrational) magnitudes and the special theory of numerical magnitudes, as given independently, from outside the theory itself, as it were. These objects are conceived first and foremost as spatial magnitudes, such as lengths, areas, and volumes, which are independently given by the science of geometry. The theory of magnitude takes such an independently given object - a given finite line segment, for example - as input and yields a definite answer to the question "What is the magnitude of this object?" as output. This is accomplished by arbitrarily choosing a unit for the magnitude in question (thus, if the magnitude is the diagonal of a square, say, we might choose the side of the square as a unit) and then, by calculation, attempting to express it as a sum of such units. If the magnitude and the unit are commensurable, arithmetic yields a determinate whole number or fraction; if not, algebra (the theory of ratios) nonetheless allows us to find a definite rule of approximation by numbers (including fractions), a rule of approximation that can be made as accurate as one wishes [...]."
[142] Ibid. "[...] techniques of calculation [...]."
[143] Id. p. 228. "[...] objects of intuition as magnitudes, are just the particular magnitudes [...]."
[144] Ibid. "[...] the concept of a thing in general through the determination of magnitude [...]."

operações e conceitos invocados pela aritmética e pela álgebra para fins de manipulação e, desse modo, calcular a magnitude específica de qualquer magnitude que exista”[145]. Assim, diferentemente da geometria, a qual opera por meio dos *Quantum* fornecidos pelos axiomas de Euclides, a aritmética não possui axiomas, uma vez que o conceito de *Quantität* – tomado em si mesmo – não é baseado na postulação de nenhuma grandeza espacial específica.

O conceito de *Quantum* está ligado ao conceito de *espaço* enquanto forma da intuição pura e, portanto, ligado à geometria. Já o conceito de *Quantität,* por sua vez, não está circunscrito ao espaço e, logo, não está restrito à intuição. O espaço é intuído e, a partir disso, gera os objetos sobre os quais a aritmética e a álgebra irão se debruçar a fim de elevá-los a um nível mais sutil de racionalização e simbolização.

Contudo, o fato de os objetos da álgebra e da aritmética (*Quantum)* não serem temporais não implica que não exista temporalidade "na construção do próprio conceito de magnitude (quantity)”[146]. Por meio do *esquema puro da magnitude (Quantität)* a temporalidade se faz presente na aritmética e na álgebra, uma vez que tal *esquema* consiste na representação simbólica efetuada pelo número. Logo, o *esquema puro da magnitude (das reine Schema der Grösse)* faz referência à “representação que unifica a adição sucessiva de unidade para unidade”[147] de modo que, ao ligarmos sucessivamente uma unidade à outra estamos trabalhando com a intuição do tempo. A partir dessa sucessão, o *tempo* – enquanto forma da intuição pura – passa a ser necessariamente um elo de sucessão causal.

Precisamos notar que o número *(Zahl)* - enquanto unificante da sucessão aditiva - não opera sobre os objetos da intuição, uma vez que estes lidam com a “imagem pura da magnitude”[148] *(das Reine Bild der Grösse)*. Surge, assim, a distinção kantiana entre o conceito de *imagem (Bild/image)* e o de *esquema (Schema/schema).* Os *Quantum,* (representações dos objetos da intuição sensível) lidam com a primeira categoria (*imagem*), ao passo que a segunda *(esquema)* se refere ao *número* e,

[145] Ibid. “[...] comprises the operations and concepts invoked by arithmetic and algebra for manipulating, and thereby calculating the specific magnitude of, any magnitudes that exist [...].”
[146] Id. p. 229. “[...] in the construction of the concept of magnitude (quantity) itself.”
[147] Cf. *KrV* A142/B182. “The pure image of all magnitudes (quantorum) for outer sense is space; that of all objects of the senses in general is time. But the pure schema of magnitude (quantitatis), as a concept of the understanding, is number, a representation which comprises the successive addition of homogeneous units. Number is therefore simply the unity of the synthesis of the manifold of a homogeneous intuition in general, a unity due to my generating time itself in the apprehension of the intuition.”
[148] Cf. Ibid. Ver também: FRIEDMAN, 1990, p. 229.

portanto, à representação simbólica fornecida pelo conceito de *quantidade*. Logo, embora os objetos que dão fundamentação para a teoria da magnitude, i.e., os *Quanta* utilizados pela geometria não sejam temporais, "o conceito de magnitude (quantidade) é de algum modo temporal"[149].

A noção de *sucessão* sobressai-se como aquela que permite fazermos uma leitura temporal da aritmética, uma vez que a *mecânica pura* (*teoria ge*ral do *movimento)* opera sobre *esquemas* numéricos os quais, através da noção de *sucessão,* trazem à tona o *tempo.* Friedman ressalta que a √2 - (1.414213562373095) é um "fato da aritmética pura"[150], uma vez que tal grandeza irracional só pode ser determinada por meio de um processo de enumeração sucessiva. Assim, visto que a √2 é uma abstração pura, ela só pode ser determinada por meio do processo de enumeração sucessiva a fim de aproximar-se de um número inteiro. Tal iteração, ao atuar através do acréscimo de um ponto a outro – por meio da mecânica pura - gera, inevitavelmente, o tempo.[151]

Para Friedman, a série numérica – ou os números naturais – a qual pode apenas ser representada no tempo através da "adição de unidade a unidade"[152] é o fundamento de todo cálculo possível concernente à magnitude, ou seja, da álgebra e da aritmética. E desta maneira o autor interpreta a célebre passagem da *KrV* A10/B15, na qual Kant explica a proposição *7 + 5 = 12* como sendo sintética *a priori* e, portanto, apodítica:

> Esse é, de fato, o motivo de 3 + 4 = 7 ser sintético; o motivo de, nas palavras de Kant, ser um 'postulado i.e., um juízo prático imediatamente correto' (Ak. 10, 556. 1; Zweig, 129). Eu necessito de segurança quanto à possibilidade de construção de um número 3 + 4 (para nós, quanto à possibilidade de sua existência); e essa segurança pode ser fundamentada apenas na possibilidade de repetição sucessiva de qualquer operação dada. No presente caso, eu estou apresentando os dois números: 3 e 4, cada qual em termos da possibilidade da repetição da operação de adição de um (para nós, a função de sucessão) um número de vezes finito; para representar 3 + 4, então, eu tenho apenas que realizar a operação correspondente a

[149] FRIEDMAN, 1990, p. 229. "[...] the concept of magnitude (quantity) is itself in some way temporal.
[150] Id. p. 230. [...] fact of pure arithmetic [...]."
[151] Cf. *Ak*. 11, 208. "But the reason why the understanding, which has arbitrarily created the concept of √2, must content itself with an asymptotic approach to the number √2 and cannot also produce the complete numerical concept (the rational relationship of √2 to unity) - the reason for this has to do with time, the successive progression as form of all counting and of all numerical quantities; for time is the basic condition of all this producing of quantities."
[152] FRIEDMAN, 1990, p. 230. "[...] the successive addition of unit to unit [...]."

> 4 sucedendo (como uma continuação de) a operação correspondente a 3. [153]

Nessa passagem, a função de sucessão (*sucessor function)* é apontada como sendo o fundamento da *aprioridade sintética* da matemática kantiana. Tal função – enquanto característica da intuição pura do tempo – é a que permite toda possibilidade de cálculo aritmético, uma vez que é o lugar da aplicação de uma categoria, a quantidade.

Em um primeiro momento, poderíamos considerar o exemplo dado por Kant (3 + 4) – como demasiado simplista para o procedimento aritmético, dado que a matemática lida com operações deveras mais complexas que essa, entre elas a definição da √2 (1.414213562373095). Contudo, visto que o próprio Kant corroborou a irracionalidade de tal raiz, ele não estava alheio aos problemas extremamente abstratos da aritmética. Em verdade, a operação 3 + 7 não é absurdamente diferente da √2 (1.414213562373095), uma vez que a única diferença entre ambas é que a primeira "termina em um número finito de passos”[154] e a segunda não. Isto é, a *iteração sucessiva* aplicada em 3 + 4 é a mesma que é aplicada na √2. A diferença entre tais operações consiste em que, no caso da desta ultima a *iteração sucessiva* se estender *ad infinitum* para a definição da √2. E, tal infinitude é a responsável pela atribuição do conceito de *irracional* para a √2. Assim, ao invés de aplicarmos a operação de iteração sucessiva um determinado número de vezes – atingindo, dessa forma, um "conceito completo de número”[155] - devemos repeti-la sem nunca chegarmos a um número inteiro, mas somente a uma aproximação (1.414213562373095).

Por meio da intuição pura do espaço enquanto base da representação dos objetos geométricos pode-se obter uma representação aritmética – ainda que incompleta e, portanto, *irracional* – por meio da *iteração sucessiva.* Essa *iteração* faz com que a aritmética seja o fator incondicional para a determinação numérica da

[153] Ibid. “This, in fact, is why 3 + 4 = 7 is synthetic; why, in Kant's words, it is a "postulate, i.e., an immediately certain practical judgment" (Ak. 10, 556. 1; Zweig, 129). For I need assurance that a number 3 + 4 can be constructed (for us, that it exists); and this assurance can only be grounded on the possibility of successive repetition of any given operation. In the present case, I am given the two numbers 3 and 4, each in terms of the possibility of repeating the operation of addition of one (for us, the successor function) a given finite number of times; to represent 3 + 4, then, I have only to perform the operation corresponding to 4 succeeding (as a continuation of) the operation corresponding to 3.”
[154] Id. p. 231. “[...] terminates in a finite number of steps [...].”
[155] Ibid.” [...] complete number concept [...].”

diagonal do quadrado, ainda que este seja dado por uma via independente – pela intuição pura *do espaço.*

Friedman propõe que, apesar de Kant afirmar "que apenas a geometria pode demonstrar a real possibilidade da √2"[156], pode-se conhecer abstratamente uma magnitude sem precisarmos apelar para a intuição geométrica. Tendo em vista que a "iteração sucessiva de uma unidade"[157] pode ser utilizada como um processo de construção finito, é possível calcularmos um *quantum* (integral ou fracionário) sem que seja necessário o suporte intuitivo da geometria e do processo de construção baseado na geometria euclidiana. Contudo, o autor aponta igualmente para o fato de que um "quantum com magnitude irracional"[158] - diferentemente das magnitudes integrais ou fracionárias - não pode ser construído meramente através da aritmética via *iteração sucessiva:*

> Neste caso, portanto, nós precisamos apelar para a geometria a fim de construir tal magnitude em um número finito de passos: por exemplo, via a construção Euclidiana do quadrado em Prop. 1.46, construção esta que possibilita facilmente a construção da diagonal se aplicarmos o Postulado 1. [159]

A partir da passagem supracitada, podemos notar que ambos os procedimentos - da geometria e da aritmética – se dão por meio de um processo de *iteração sucessiva*, a qual, por sua vez, se dá por meio de um processo temporal. Em verdade, os termos *construção* e *iteração,* apesar de não serem idênticos, referem-se ao mesmo processo. Conforme afirmado anteriormente, a filosofia kantiana, de modo geral, busca estabelecer os limites do conhecimento humano, restringindo-o a certas condições de possibilidade, logo, uma relação de sucessão não pode ser interpretada sem que haja uma relação entre causa e efeito e, portanto, sem que o *tempo* seja tomado como inerente a esse processo. Dado que não temos acesso às coisas em si mesmas, mas, apenas aos fenômenos, estes não podem ser acessados sem as formas da intuição pura: espaço e tempo. Uma leitura das relações entre causa e efeito – na perspectiva da filosofia kantiana e em termos contemporâneos – só poderia

[156] Ibid. "[...] that only geometry can show the real possibility of the concept of √*2* [...]."
[157] Id. p. 232. "[...] successive iteration of a unit [...]."
[158] Ibid. "[...] a *quantum* with irrational magnitude [...]."
[159] Ibid. "[...] In this case, therefore, we must appeal to geometry in order to construct such a magnitude in a finite number of steps: for example, via Euclid's construction of the square in Prop. 1.46, which easily yields a construction of the diagonal if we then apply Postulate 1."

ser realizada sem a temporalidade em uma máquina inconsciente, tal como um computador, o qual realiza operações lógicas – de causa e efeito – mas é desprovido de consciência e, portanto, desprovido de racionalidade propriamente dita e, logo, desprovido das condições *a priori* do espaço e tempo, condições estas que são próprias à computação não artificial, à computação humana propriamente dita.

4.2 Geometria e construtivismo

A geometria utiliza-se de um processo de *iteração sucessiva*, de modo que ela (a geometria) "como a álgebra e a aritmética também envolve, de maneira central, progressão sucessiva ou iteração repetida”[160]. A necessidade de construirmos geometricamente uma magnitude implica necessariamente a temporalidade, uma vez que precisamos realizar tal construção em *um número definido de passos.* Isto é, precisamos agregar elementos de maneira sucessiva e, logo, em tempos determinados - T_1, T_2, T_3, $T_{n.}$ Assim, dado que a intuição pura do espaço e do tempo são condições necessárias para toda construção matemática, os passos para a construção de uma grandeza geométrica não podem ser executados sem uma relação sequencial e, portanto, temporal.

A construção empregada na geometria – conforme a filosofia da matemática kantiana - é baseada nos três primeiros postulados de Euclides, os quais permitem que todos os objetos da geometria euclidiana sejam construídos. O primeiro postulado afirma que: dados dois pontos quaisquer, um segmento de reta pode ser traçado entre ambos. O segundo, por sua vez, consiste em que um segmento de reta definido pode ser acrescentado indefinidamente para a construção de uma reta. Já o terceiro, afirma que a partir de um ponto e de uma determinada distância, pode-se traçar um círculo tendo como centro o ponto e a distância como raio. Estes três postulados constituem operações distintas que devem ser repetidos sucessivamente "em um número finito de vezes [...] e em qualquer ordem [...] a fim de construir todos os objetos exigidos pela geometria euclidiana [...]”[161].

Logo, tal construção geométrica é um procedimento sucessivo o qual requer tempos diferentes para a aplicação dos postulados supracitados a fim de que um determinado objeto possa ser conhecido. Euclides nada mais teria feito do que

[160] Ibid. “[...] geometry, like algebra and arithmetic, also centrally involves successive progression or repeated iteration [...].”
[161] Ibid. “[...] any finite number of times (and in any order), and this procedure generates all the objects required for Euclidean geometry [...].”

identificado os "inputs fixos determinados”[162] que permitem a construção geométrica. E este é o ponto crucial para a interpretação esclarecedora proposta por Friedman, a saber, que a geometria – apesar de lidar com objetos que não são propriamente temporais – é, na verdade, uma construção realizada no tempo de maneira muito semelhante à álgebra e à aritmética. A única diferença existente entre essas duas disciplinas e a geometria seria o fato de que esta última possui *inputs fixos determinados*, ou seja, sua construção parte das operações descritas pelos primeiros três postulados de Euclides, ao passo, que a álgebra e a aritmética não.

Assim, a "construção ostensiva”[163] – empregada pela geometria – e a "construção simbólica”[164] – utilizada pela álgebra e pela aritmética – não são radicalmente diferentes, uma vez que tal diferença se dá apenas na medida em que esta última possui um nível mais elevado de abstração do que a construção ostensiva.

Vejamos o seguinte argumento a respeito da construção geométrica euclidiana:

> Para ilustrar, retornemos ao exemplo da construção euclidiana do círculo citada em B287. Kant diz que essa construção "primeiro gera o conceito de tal figura". Por qual motivo exatamente ele afirma isso? Uma vez que nós podemos definir o conceito de um círculo independentemente da construção: a saber, como uma figura plana na qual todos os seus pontos são equidistantes de um centro comum (Elementos, Livro I, Def. 15). A ideia subjacente, eu penso, é que embora a definição possa, de fato, ser expressa conceitualmente, a proposição existencial correspondente à construção - que para todo ponto e para toda linha existe um círculo com tal ponto como centro e tal linha como raio - não pode. Na mera lógica silogística essa proposição existencial não pode, estritamente falando, nem ao menos ser afirmada (como nós faríamos hoje, isso envolve a forma da dependência quantificacional ∀∀∃). A única maneira de pensar ou representar essa proposição, portanto, é através da construção mesma. Em outras palavras, o terceiro Postulado de Euclides não afirma, simplesmente, algo a respeito de círculos - como um mero fato, por assim dizer - ele, por si só e primeiramente, torna possível termos o pensamento em questão. A única maneira que eu tenho de representar a existência dos círculos exigidos é através da posse real da construção, e isso, automaticamente, torna o pensamento em questão verdadeiro.[165]

[162] Id. p. 233. “[...] given fixed inputs [...].”
[163] Ibid. “[...] ostensive construction [...].”
[164] Ibid. “[...] simbolic construction [...].”
[165] Id. p. 238. “To illustrate, let us return to the example of the Euclidean construction of the circle from B287. Kant says that this construction "first generates the concept of such a figure". Why exactly does he say this? For we can of course define the concept of a circle independently of the construction: namely, as a plane figure all of whose points are equidistant from a common center (Elements, Book I, Def. 15). The underlying idea, I think, is that although the definition can indeed be conceptually

O terceiro postulado de Euclides não é apontando como sendo um axioma dogmático, i.e., dado arbitrariamente – pura e simplesmente sem necessidade de prova – mas sim, como a condição necessária de possibilidade para a construção do círculo, de modo que sem o terceiro postulado não poderíamos representar o círculo através da mera lógica aristotélica. Neste ponto, poderíamos levantar uma hipótese a qual serviria como uma chave de leitura importantíssima para a resolução da disputa entre o *logicismo* - de Frege e Russell – e o *psicologismo* – de Kant, a saber: *A representação tornada possível por meio da lógica quantificacional clássica não seria apenas uma simbolização formal que só foi tornada possível a partir da filosofia transcendental? A lógica quantificacional de Frege e Russell não seria apenas um desenvolvimento ulterior e dependente da construção proposta pela filosofia da matemática de Kant?* Em outras palavras, *a lógica quantificacional – sem fundamentação epistêmica - poderia ser utilizada por um ser humano e obter resultados verdadeiros?*

A fim de não perdermos o foco em relação à problemática aqui investigada, precisamos reiterar que Kant preocupava-se com a possibilidade real do conhecimento matemático e não uma mera correção formal. É nessa esteira que o filósofo alemão busca encontrar as condições de possibilidade do conhecimento geométrico e aritmético, de modo a fornecer uma ciência matemática propriamente dita. Ora, amparado apenas por uma lógica rústica – como o é a silogística – Kant precisou apelar, necessariamente, para a noção de *intuição pura* do tempo e, assim, desenvolver sua lógica transcendental, a fim de poder apresentar uma concepção matemática que pudesse ser fundamentada por algo além do *critério de não-contradição* defendido por Leibniz. Logo, Kant visava desenvolver uma teoria do conhecimento que fosse metafisicamente demarcada e, portanto, imune aos exageros a que o pensamento puro se permite sem os *inputs* do espaço e do tempo como

expressed, the existential proposition corresponding to the construction - that for any point and any line there is a circle with the given point as center and the given line as radius - cannot. In mere syllogistic logic this existential proposition cannot, strictly speaking, even be stated (as we would now put it, it involves the form of quantificational dependence ∀∀∃). The only way even to think or represent this proposition, therefore, is by means of the construction itself. In other words, Euclid's Postulate 3 does not simply assert something about circles - as a mere fact, as it were - it alone makes it possible even to have the thought in question in the first place. The only way I can represent the existence of the required circles is by actually being in possession of the construction, and this automatically makes the thought in question true.”

condicionadores de toda experiência possível. Deste modo, parece natural que a filosofia da matemática kantiana fosse formulada de maneira congruente com sua epistemologia, de maneira que toda a possibilidade de abstração matemática não ultrapasse os limites do que pode ser afirmado como verdadeiro – i.e., do que a razão humana pode, de fato, conhecer, independentemente de tratar-se de fenômenos externos ou de abstrações matemáticas. E, é nesse sentido que a intuição pura do tempo é a condição formal de toda e qualquer série, seja em relação à interação sucessiva ou a séries numéricas.[166]

Vimos que a filosofia transcendental opera com os *inputs* da geometria euclidiana enquanto condições de possibilidade para o conhecimento dos fenômenos que têm sua origem unicamente na intuição empírica. Logo, a intuição pura do espaço é o pressuposto necessário para construção de conceitos geométricos. A aritmética, por sua vez, não lida com os objetos da intuição empírica, mas, se ocupa unicamente em fornecer sentido para os conceitos geométricos. Quanto a isso, Friedman cita novamente a √2 e afirma que “enquanto a geometria é necessária para fornecer significado objetivo para a √2 (construindo a diagonal do quadrado)”[167] a aritmética possui a prerrogativa de tornar possível o cálculo da magnitude de tal diagonal, isto é, trazer à tona, a *Quantität* do *Quantum* fornecido pela geometria. E, é a intuição pura do tempo – obtida por meio da mecânica pura - que permite este cálculo, fornecendo as bases apriorísticas para a noção de *iteração.*

A relação entre a *imagem* de um número e sua simbolização aritmética constitui um fator basilar para que se possa compreender apropriadamente a concepção de aritmética fornecida pelo sistema epistemológico-matemático kantiano. Os *esquemas (schematas)* da geometria - os quais funcionam como *regra da síntese da imaginação*, i.e., as condições *a priori* para a construção de conceitos geométricos a partir da intuição pura do espaço - são de cunho diferente dos *esquemas (schematas)* da aritmética, uma vez que, conforme vimos anteriormente, esta possui um grau bem mais elevado de abstração do que a geometria. Enquanto a geometria pode representar uma determinada grandeza através de pontos correspondentes no espaço, a aritmética, por sua vez, o faz através do e*squema* da *iteração sucessiva* possibilitado pela mecânica pura e, logo, pela intuição pura do tempo. Ao invés de

[166] Id. p. 233.
[167] Id. p. 235. “[...] whereas geometry is required in order to provide objective meaning for the concept of √2 (by constructing the diagonal of a square) [...].”

representarmos mil pontos no espaço (...................), adotamos a noção de "n iterações ou repetições de uma operação arbitrária”[168], de maneira que possamos construir sucessivamente "a representação do número em geral”.[169] Ou seja, para podermos representar o número 1000 enquanto uma "intuição homogênea em geral[170]" basta que apliquemos repetidamente a operação de iteração sucessiva quantas vez tal aplicação for necessária para a obtenção da representação numérica 1000. Poderíamos, desta forma, chegar ao número 1000 escolhendo arbitrariamente o número 10 como ponto de partida e adicioná-lo noventa e nove vezes após si mesmo. Ou, então, a partir do número 100, adicionar sucessivamente nove sequencias de 100.

Aqui parece ficar claro que a matemática kantiana pode lidar com números demasiadamente grandes – o que não é o caso do número mil – sem que se precise adotar algum expediente de cunho meramente lógico e, portanto, desprovido da construção temporal – e epistemologicamente fundado sobre a cognição humana – proposta por Kant, por meio da intuição pura do tempo como fundamento da aritmética. Logo, ao que tudo indica, Frege não compreendeu apropriadamente a estrutura da aritmética kantiana quando afirmou que Kant estava errado quanto à necessidade de os números serem dados através da intuição, bem como, quanto à inabilidade da aritmética kantiana de lidar com números grandes ou infinitos.[171]

A matemática kantiana – fundada sobre a filosofia transcendental – apresenta os *esquemas* como sendo estruturas racionais próprias ao pensamento puro e *a priori,* ao passo que as *imagens* são representações fornecidas pela sensibilidade. Desse modo, os e*squemas* possuem a prerrogativa de possibilitar "um tipo de representação rigorosa”[172] para os conceitos matemáticos, representação esta que "vai muito além da mera lógica geral”[173]. Visualiza-se, uma vez mais, as limitações da lógica geral

[168] Id. p. 237. “[...] *n* iterations or repetitions of an arbitrary operation [...].”
[169] Ibid. “[...] the representation of number in general [...].”
[170] Ibid. “[...] a homogeneos intuition in general [...].”
[171] Cf. FREGE, The Foundations of Arithmetic*,* §89. “I must also protest against the generality of KANT'S' dictum: without sensibility no object would be given to us. Nought and one are objects which cannot be given to us in sensation. And even those who hold that the smaller numbers are intuitable, must at least concede that they cannot be given in intuition any of the numbers greater than $1000^{1000^{1000}}$, about which nevertheless we have plenty of information. Perhaps KANT used the word ‘object’ in a rather different sense; but in that case he omits altogether to allow for nought or one, or for our ∞_1,—for these are not concepts either, and even of a concept KANT requires that we should attach its object to it in intuition.”
[172] Op. Cit, p. 238. “[...] a kind of rigorous representation of [...].”
[173] Ibid. “[...] goes far beyond the resources of mere general logic [...].”

leibniziana, uma vez que os objetos gerados por uma tal lógica teriam sua possibilidade apenas no pensamento e nunca nos liames da possibilidade da experiência cognitiva real. A síntese entre *imagens e squematas*, surge como sendo a estrutura de todo raciocínio matemático possível que não pretenda extrapolar os limites da razão humana.

Na seguinte passagem, Friedman afirma que:

> Kant poderia muito bem admitir, por exemplo, que é possível definir os números independentemente da intuição pura do tempo: algo do tipo 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, e assim por diante. Consideremos, contudo, a proposição existencial correspondente à função de sucessão, a saber: para todo *n* existe um número *n* + 1. Novamente, essa proposição existencial não pode, em sentido estrito, nem ao menos ser expressa na mera lógica geral como Kant a compreende (certamente ela envolve a forma ∀∃). A única maneira de pensar ou de representar tal proposição se dá, portanto, através de nossa posse da função de sucessão: em termos kantianos, através de nossa capacidade de iterar sucessivamente qualquer operação dada. Isso, para Kant, pressupõe a intuição pura do tempo e, mais uma vez, se conclui que a única maneira com a qual eu posso representar a existência dos números necessários (a qual equivale a uma representação da infinidade da série numérica) automaticamente torna a mesma proposição verdadeira [...].[174]

Evidencia-se a incapacidade da lógica quantificacional no que tange à representação da série numérica, de modo que a proposição ∀n∃n (n+1) só pode assim ser simbolizada - e compreendida como uma operação de sucessão – por meio da *função de sucessão* kantiana fundada sobre a mecânica pura e, assim, na intuição pura do tempo. Logo, uma conclusão fundamental surge a partir disso, a saber, que a *função de sucessão* é a que permite que possamos pensar na infinidade das séries numéricas, de modo que – ao que parece – a proposição ∀n∃n (n+1) é uma mera simbolização que não contém em si mesma o procedimento propriamente dito de sucessão numérica. Tal proposição é, na verdade, uma mera grafia da *função de sucessão* trazida à tona por Kant, visto que, sem tal função nós não poderíamos

[174] Ibid. “[…] An analogous point holds for symbolic or arithmetical construction. Kant might very well admit, for example, that it is possible to define the numbers independently of the pure intuition of time: in some such fashion as 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, and so on. Consider the existential proposition corresponding to the successor function, however: namely, for every n there is a number n + 1. Again, this existential proposition cannot, strictly speaking, even be expressed in mere general logic as Kant understands it (it involves the form ∀∃ of course). The only way even to think or represent this proposition is therefore by means of our possession of the successor function itself: in Kant's terms, by our capacity successively to iterate any given operation. This, for Kant, presupposes the pure intuition of time, and it again follows that the only way I can represent the existence of the required numbers (which amounts to a representation of the infinity of the number series) automatically makes that very representation true [...].”

transformar a capacidade sucessiva e iterativa em uma proposição. A estrutura proposicional – apresentada por Frege – constitui um momento posterior e extrínseco ao mapeamento da cognição matemática realizado por Kant. Portanto, a intuição pura do tempo é o fundamento objetivo dos juízos matemáticos: através do tempo surgem os *esquemas*, os quais são "construções na intuição pura”[175] que permitem a aprioridade apodítica da matemática.

A importância da intuição pura na filosofia da matemática kantiana - seja no tocante à geometria ou à aritmética - consiste em ela assegurar as condições de possibilidade do pensamento matemático. Ou seja, a intuição pura (espaço e tempo) - servem como critério para a exclusão de juízos matemáticos que, apesar de não apresentarem contradição em sua formulação lógica, são, contudo, inconcebíveis no âmbito epistemológico. A mera validade lógica não garante a validade dos conceitos matemáticos, de modo que, um estado de coisas - ainda que logicamente válido – que apresente conceitos que não possuam *esquemas* correspondentes na intuição pura é um estado de coisas impossível de ser pensado nos liames da cognição humana real. A lógica geral pode formular sem qualquer dificuldade e de maneira válida "o conceito de um segmento de linha que não seja infinitamente divisível[176]". Tal conceito, ainda que não contenha uma contradição ($P \wedge \sim P$), só pode ser pensado através da construção espacial a priori proporcionada pela "bisseção de Euclides [...] e, dessa maneira, um segmento de linha que não seja infinitamente divisível é completamente impossível”.[177] Ora, vemos que a intuição pura do espaço – representada pelo postulado de Euclides – é a condição necessária de possibilidade da representação de um segmento de linha – embora não da linha mesma – na razão humana, de maneira que, qualquer pensamento ou representação só podem ser concebidos através da construção expressa pelo postulado em questão. Logo, o conceito logicamente válido de *segmento de linha que não é infinitamente divisível* não pode nem ao menos ser imaginado por seres racionais. E isso, por si só, garante a validade epistêmica apodítica, sintética e *a priori* dos juízos matemáticos fundados sobre a intuição pura.

[175] Id. p. 239. “[...] constructions in pure intuition [...].”
[176] Ibid. “[...] the concept of a line segment that is not infinitely divisible [...].”
[177] Id. p. 240. “[...] Euclid's bisection [...], and so a line segment that is not infinitely divisible is entirely impossible.”

O conceito de "significado objetivo e realidade objetiva"[178] dos juízos matemáticos, para Kant, precisa ser interpretado com cautela, a fim de não compreendermos a intuição pura como sendo um expediente realista de fundamentação – seja ele de cunho internalista ou externalista. A validade dos juízos da matemática consiste – diga se novamente – na síntese transcendental entre os *esquemas* da intuição pura e as *imagens* fornecidas pela intuição empírica. Logo, a consciência subjetiva - quando aplica a capacidade de calculo ao mundo empírico – apesar de não considerar de maneira cética os dados advindos do mundo externo, por meio dos sentidos, em nenhum momento se compromete com a realidade externa dos objetos tomados em si mesmos, mas, somente lida com as *imagens* fornecidas pelas representações captadas pelos sentidos. Ora, a estrutura da dedução transcendental expressa na célebre passagem da *KrV*B74/A50 é a chave para compreendermos a filosofia da matemática kantiana tendo como pano de fundo a epistemologia desenvolvida pelo filósofo alemão.[179] A síntese realizada entre e*squemas* e *imagens* constitui o cerne da teoria matemática fundada sobre a lógica transcendental, a qual opera unicamente sobre os fenômenos e nunca sobre os objetos empíricos propriamente ditos.

Friedman explicita de maneira arguta a questão do significado e da realidade objetiva para Kant, bem como, sua discordância com a lógica geral de Leibniz e Wolff:

> [...] Em especial, a polêmica de Kant não advém simplesmente da assunção daquilo que a filosofia de Leibniz-Wolff nega de maneira explícita, a saber: que a lógica geral é inadequada para nos fornecer uma noção eficaz de significado objetivo. A concepção de Kant, a respeito do papel da intuição pura na matemática, não invoca de maneira direta sua concepção geral de significado objetivo e de realidade objetiva em nenhum momento, uma vez que esta última é concernente às intuições empíricas e às imagens e não às intuições puras e aos esquemas. Ao invés disso, a teoria kantiana - no que tange ao caráter sintético da matemática - é uma tentativa de demonstrar a inadequação da mera lógica geral em absoluto, independentemente da questão da relação dos nossos conceitos com possíveis objetos (empíricos). A mera lógica geral é completamente inadequada até mesmo para a representação de conceitos e proposições matemáticos e, tal circunstância, por si só, motiva um movimento em direção à intuição pura e à lógica transcendental. Tendo feito tal diferenciação, nós estamos de fato aptos a desenvolver uma noção tipicamente

[178] Ibid. “[...] objective meaning and objective reality [...].”
[179] Cf. *KrV*B74/A50. “Intuition and concepts constitute, therefore, the elements of all our knowledge, so that neither concepts without an intuition in some way corresponding to them, nor intuition without concepts, can yield knowledge.”

> kantiana de significado objetivo e de realidade objetiva. Para isso, então, requer-se que os esquemas matemáticos da intuição pura tenham um papel duplo: eles servem para gerar os conceitos da matemática pura e, também - quando incorporados em atividades construtivas específicas *in concreto* - para fornecer objetos (isto é, imagens) para tais conceitos. Desse modo, para obtermos uma noção coerente de realidade objetiva nós precisamos ser capazes de demonstrar 'que a síntese imagem-forma, através da qual nós construímos um triângulo na imaginação, é exatamente a mesma que aquela que exercitamos na apreensão da aparência ao darmos a nós mesmos um conceito empírico de tal aparência' (B271). E, nós estamos aptos a demonstrar isso somente quando nos movemos para além da teoria da matemática pura, para os mistérios mais profundos da Dedução Transcendental.[180]

Kant desenvolve seu conceito de *intuição pura* a fim de solucionar um problema epistemológico o qual não foi sequer tangenciado pela filosofia de Leibniz: a justificação e o ancoramento cognitivo do conteúdo do pensamento. A lógica geral não se ocupa com tal questão, por um simples motivo, a saber, ela não necessita nenhum tipo de explicação referente às especificações do processo epistemológico, ela apenas se ocupa em elucidar de maneira deveras elementar o processo lógico, a fim de que, através do *critério de não contradição*, o pensamento possa alcançar um grau de objetividade último no que diz respeito à verdade das entidades numéricas e dos objetos externos. E, a fim de lograr tal objetivo, a lógica geral não pode prescindir de um *fundacionalismo* extremado, de caráter metafísico e dogmático. Logo, a intuição pura surge como a pedra de toque de uma revolução epistemológica que passa a atribuir à consciência subjetiva um papel que até então vinha lhe sendo negado: o de determinar a validade epistêmica do processo de cálculo numérico, bem como a dos

[180] Op. Cit. p. 240. “[...] In particular, Kant's polemic does not proceed by simply assuming what the 'Leibniz-Wolffian' philosophy explicitly denies: namely, that general logic is itself inadequate for providing us with a useful notion of objective meaning. Kant's conception of the role of pure intuition in mathematics does not directly invoke his general conception of objective meaning and objective reality at all, for this latter concerns empirical intuitions and images, not pure intuitions and schemata. Rather, Kant's theory of the synthetic character of mathematics is an attempt to show the inadequacy of mere general logic directly, quite independently of the question of the relation of our concepts to possible (empirical) objects. Mere general logic is entirely inadequate for even the representation of mathematical concepts and propositions, and this circumstance motivates a move to pure intuition and transcendental logic all by itself. After we have made this decisive break, we are in fact able to develop a characteristically Kantian notion of objective meaning and objective reality. For it then turns out that the mathematical schemata of pure intuition have a dual role: they serve to generate the concepts of pure mathematics, and also, when embodied in particular constructive activities *in concreto*, to provide objects (namely images) for these concepts. That we thereby obtain a coherent notion of objective reality, however, only follows if we are also able to show 'that the image-forming synthesis through which we construct a triangle in imagination is precisely the same as that which we exercise in the apprehension of an appearance, in making ourselves an empirical concept of it' (B271). And we are able to show this, in turn, only when we move beyond the theory of pure mathematics to the deeper mysteries of the Transcendental Deduction [...].”

objetos externos ao indivíduo. É nesse contexto que Kant ressalta a incapacidade da lógica geral em servir de base para qualquer ramo da ciência matemática. Ora, a estrutura de uma área do conhecimento, o qual pretenda comprovar a validade objetiva dos resultados por ele produzidos, não pode - para o bem do próprio conceito de ciência - basear-se em um modelo lógico bruto e, portanto, incapaz de detectar as nuances inferenciais e as características fundamentais do processo cognitivo a que se propõe. A lógica geral, ao não levar em conta as condições à priori da cognição humana - mais especificamente, os *esquemas* da intuição pura - simplesmente não é capaz de fornecer um conhecimento válido, isto é, uma crença adequadamente justificada nos liames da cognição humana.

Vimos que a aritmética, tomada em si mesma, difere da geometria em vista de ser independente dos dados da intuição captados pela intuição geométrica – *Quantum.* Contudo, se analisássemos a aritmética sem reconhecermos sua ligação com a geometria, deixaríamos a representação numérica relegada a uma mera abstração fundada em lugar algum. Ela seria como que um cálculo possibilitado simplesmente por uma racionalidade meramente lógica e, portanto, não epistemológica. A partir disso, vale dizer que mesmo uma lógica de cunho objetivista – como a de Frege e Russell – necessita do ancoramento proporcionado pela filosofia transcendental, a fim de não regredir aos primórdios fundacionais epistemologicamente imprecisos e brutos pretendidos por Leibniz.

Dessa forma, poderíamos perguntar? *Como o tempo, tomado em sua forma absoluta – sem conexão com a subjetividade – poderia estabelecer uma métrica que proporcionasse sua delimitação e marcação? Como poderíamos lidar com a noção de iteração sucessiva se, na realidade, não temos acesso intuitivo do tempo em si mesmo, mas apenas do espaço?*

A fim de concluirmos o posicionamento kantiano sobre tais questões, precisamos compreender que o conhecimento – no seio da filosofia transcendental – precisa ser explicado de maneira metódica e, para fins didáticos, exposto em momentos distintos. A consciência subjetiva, a qual se vê bombardeada pelo múltiplo externo objetivo, precisa sintetizar a representação fenomênica com as categorias *a priori da intuição* a fim de extrair a justificação dos juízos matemáticos relativos às grandezas. E, para tanto a noção de temporalidade "só pode surgir em conexão com a intuição espacial"[181], uma vez que "o tempo sozinho, por assim dizer, não pode apoiar uma métrica"[182]. Vejamos a seguir, a argumentação exposta na *KrV,* a qual Friedman utiliza para elucidar o problema da objetividade do conhecimento construído através da intuição pura do tempo:

> […] para representar a *mudança*, como a intuição que corresponde ao conceito de *causalidade*, temos de recorrer ao exemplo do movimento, como mudança no espaço, e só assim, são susceptíveis de intuição mudanças, cuja possibilidade nenhum entendimento puro pode entender. Mudança é a ligação de determinações contraditoriamente opostas entre si na existência de uma só e mesma coisa. Mas, como é possível, que de um dado estado de uma coisa derive para a mesma coisa outro estado, oposto ao primeiro? Não só razão alguma pode tornar compreensível para si mesma, sem exemplos, a possibilidade de a dado estado de uma coisa se suceder outro, oposto ao primeiro, nem tampouco pode tornar inteligível sem intuição, e esta intuição é a do movimento de um ponto no espaço, cuja existência em diversos lugares (como sucessão de determinações opostas) nos torna, antes de mais, intuível a mudança; pois, mesmo para poder conceber mudanças internas, temos que representar, de maneira figurada, por uma linha, o tempo, como a forma do sentido interno, e representar a mudança interna pelo traçado dessa linha (pelo movimento), e por conseguinte a nossa própria existência sucessiva em diferentes estados, por uma intuição externa. O verdadeiro fundamento disto é que toda a mudança pressupõe algo de permanente na intuição, para poder ser percebida como mudança e que no sentido interno se não encontra qualquer intuição permanente.[183]

O tempo – no contexto da construção aritmética – é dado de maneira secundária em relação ao espaço, uma vez que apenas através de um procedimento

[181] Id. p. 242. "[…] can only arise in connection with spatial intuition […]."
[182] Ibid. "[…] time alone, as it were, cannot support a metric."
[183] KrVA235/B291. "[…] in order to exhibit alteration as the intuition corresponding to the concept of causality, we must take as our example motion, that is, alteration in space. Only in this way can we obtain the intuition of alterations, the possibility of which can never be comprehended through any pure understanding. For alteration is combination of contradictorily opposed determinations in the existence of one and the same thing. Now how it is possible that from a given state of a thing an opposite state should follow, not only cannot be conceived by reason without an example, but is actually incomprehensible to reason without intuition. The intuition required is the intuition of the movement of a point in space. The presence of the point in different locations (as a sequence of opposite determinations) is what alone first yields to us an intuition of alteration. For in order that we may afterwards make inner alterations likewise thinkable, we must represent time (the form of inner sense) figuratively as a line, and the inner alteration through the drawing of this line (motion), and so in this manner by means of outer intuition make comprehensible the successive existence of ourselves in different states. The reason of this is that all alteration, if it is to be perceived as alteration, presupposes something permanent in intuition, and that in inner sense no permanent intuition is to be met with." Ver também: FRIEDMAN, 1990, p. 242.

ulterior à apreensão do espaço podemos transformar a noção temporal abstrata em um *Quantum* e, dessa forma, atribuirmos a tal noção uma métrica a qual permitirá a existência da noção de *iteração sucessiva.* Logo, o tempo só existe objetivamente para uma consciência subjetiva, a qual o processa e o associa com, por exemplo, pontos que perfazem uma linha.

Parece ficar claro o modo em que o espaço se relaciona com a geometria e que o tempo se relaciona com a aritmética. Em verdade, a relação do tempo com a aritmética, para Kant, é uma relação figurativa. Conforme vimos, a categoria de tempo não é dada à consciência subjetiva de maneira direta, i.e., é dada por meio da apreensão do múltiplo externo através de uma síntese que representa os dados espaciais e permite o acesso dos fenômenos por parte da consciência. A peculiaridade do processo da construção do tempo consiste justamente nisso, no fato de ser uma construção a partir dos materiais fornecidos pela intuição pura do espaço. Assim, é a *mecânica pura* que se relaciona de maneira direta com o tempo e não a aritmética. Esta seria como que derivada daquela, o que equivale dizer que a mecânica pura é a base da aritmética, é como que o alicerce sólido para todo o edifício – de cunho altamente abstrato – construído pela aritmética kantiana.

Portanto, pode-se afirmar que: (i) o múltiplo espacial da intuição externa, uma vez que é sintetizado pela consciência subjetiva através da lógica transcendental, fornece os materiais com os quais a geometria se ocupa; (ii) a mecânica pura se utiliza desses materiais a fim de dar à consciência subjetiva a noção de iteração sucessiva, a qual possui a prerrogativa de munir a cognição humana com as noções fundamentais de sequência e sucessão, as quais, por sua vez, tornarão possível a representação do tempo e; (iii) a noção de tempo enquanto sucessão é a base para a representação numérica realizada pela aritmética, a qual é capaz de atingir o mais alto grau de abstração a partir da simbolização inicial, i.e., a partir da representação numérica. Ora, tal representação só pode ser pensada apropriadamente com base no processo de construção transcendental supracitado. Mesmo para podermos falar em uma representação numérica meramente lógica e, portanto, sem a necessidade de ancoramento na representação espacial – realizada pela mecânica pura – precisaríamos supor que tal processo *psicológico-transcendental* já ocorreu em algum momento. Caso não suponhamos tal processo, estaríamos na verdade colhendo os frutos de uma árvore negando a existência de tal árvore, o que equivale dizer que o fruto simplesmente surgiu diante de nós e que não há necessidade alguma de árvores para o surgimento de frutos.

5. A intuição pura à luz do naturalismo e do cognitivismo

“Pode-se, então, considerar improvável, visto que indubitavelmente ocorreram variações úteis para o homem, que outras variações úteis de alguma forma a cada ser na grande e complexa batalha da vida, deveriam ocorrer algumas vezes ao longo de milhares de gerações? Se isso ocorrer, podemos duvidar (lembrando que muitos mais indivíduos nascem do que possivelmente sobrevivem) que os indivíduos que têm qualquer vantagem, por mais leve que seja, sobre os outros, teriam a melhor chance de sobreviver e de procriar sua espécie? Por outro lado, podemos ter certeza de que qualquer variação no menor grau prejudicial seria rigidamente destruída. Esta preservação de variações favoráveis e a rejeição de variações prejudiciais, eu chamo Seleção Natural.”[184]

Charles Darwin

Parece haver uma tendência em buscarmos respostas isoladas e absolutas em cada autor e, por vezes, deixamos de lado o fato de que há uma progressão no conhecimento. Mesmo quando alguns pensadores se posicionam de maneira completamente antitética frente a um sistema, eles acabam por contribuir para o desenvolvimento do conhecimento, o qual parece de fato progredir através de avanços e retrocessos que acabam por permitir uma maior proximidade para com a verdade.

Kant parece ter mapeado muito apropriadamente a cognição humana, contudo, quando se fala em *intuição pura* do espaço e do tempo os filósofos analíticos rechaçam tal possibilidade veementemente, uma vez que tal intuição não teria um valor científico objetivo em vista de constituir um expediente *psicologista.*

Porém, o cognitivismo tem realizado importantes descobertas a respeito da cognição humana e, mais especificamente, da capacidade matemática, a qual – segundo tais pesquisas - necessita de capacidades mentais inatas, tais como, as noções de espaço e tempo.

Certamente, ao naturalizarmos o conceito de *intuição pura* não estaremos mais lidando com a filosofia transcendental propriamente dita, uma vez que não utilizaremos um aparato meramente abstrato e intuitivo sem comprovação empírica e, para o bem da verdade, metafísico, sob o ponto de vista contemporâneo. No entanto,

[184] DARWIN, 1997, p. 80. “Can it, then, be thought improbable, seeing that variations useful to man have undoubtedly occurred, that other variations useful in some way to each being in the great and complex battle of life, should sometimes occur in the course of thousands of generations? If such do occur, can we doubt (remembering that many more individuals are born than can possibly survive) that individuals having any advantage, however slight, over others, would have the Best chance of surviving and of procreating their kind? On the other hand, we may feel sure that any variation in the least degree injurious would be rigidly destroyed. This preservation of favourable variations and the rejection of injurious variations, I call Natural Selection.”

poderemos constatar que o modelo matemático apresentado por Kant constituiu ao longo de quase três séculos um (*meta modelo),* por assim dizer, para a matemática tomada enquanto processo mental. Tentar descobrir em que medida o modelo kantiano pode ser reinterpretado à luz do naturalismo cognitivista constitui o objetivo deste capítulo.

Assim, poderíamos nos perguntar em primeiro lugar se a intuição pura – apesar de ser considerada imensurável, a priori e fundante - constitui realmente um expediente ultrapassado, o qual não pode mais ser utilizado como base da epistemologia na matemática. E, se pudéssemos repensar o modelo kantiano levando em consideração as descobertas e teorias formuladas na contemporaneidade, mais especificamente a ciência cognitiva baseada no naturalismo desenvolvido a partir da teoria evolucionista darwiniana? Tal questionamento - apesar de poder soar excêntrico e despropositado - poderia lançar algumas luzes sobre a teoria kantiana da matemática e, assim, permitir que aproveitemos – por meio de uma reinterpretação - a genialidade das categorias kantianas do espaço e do tempo sem a necessidade de recorremos a uma teoria que se encontre apartada de nossas características cerebrais biológicas básicas.

Descobrir a maneira pela qual a *intuição pura,* enquanto recurso metafísico de fundamentação, é uma espécie de *guardadora de lugar* para as explicações científicas fornecidas pela neurociência consiste uma tarefa hercúlea e, até mesmo, arriscada sob o ponto de vista acadêmico. No entanto, tentaremos demonstrar isso, sem pretender fornecer a última palavra sobre o assunto, mas, apenas iniciar um diálogo que busque defender a continuidade da construção do conhecimento científico.

O problema da fundamentação e justificação do conhecimento constitui o cerne da filosofia transcendental, de modo que, a partir do que vimos até o presente momento, podemos reiterar a preocupação kantiana com o papel do sujeito cognoscente. E esse será um ponto de fundamental importância no momento em que tentarmos demonstrar que a estrutura da epistemologia e da filosofia da matemática kantiana apresenta, i.e., mapeia – ainda que de maneira limitada pela época - características universais do pensamento humano, das quais pretendemos demonstrar a possibilidade de serem expressas através da filosofia naturalista.

5.1 Susan Carey e os dois sistemas nucleares de cognição

Diante da querela da origem dos juízos matemáticos o naturalismo apresenta uma resposta que parece integrar a capacidade cognitivo-matemática com os fatores físicos e biológicos do ser humano. Em sua obra seminal *The Origin of Concepts,* Susan Carey apresenta uma resposta bastante satisfatória para tal problemática. Seu trabalho consiste na comprovação da existência de dois *sistemas nucleares de cognição (two core systems of cognition),* os quais seriam capazes de explicar de maneira biológica – evolutiva e genética – as habilidades matemáticas fundamentais de vários animais, inclusive o homem. Assim, a autora fala da capacidade de *representação de magnitude análoga do número (Analog Magnitude Representation of Number),* do qual dispõem humanos adultos, crianças e animais não humanos. Através desse sistema, o indivíduo é capaz de associar, já na mais tenra idade – grandezas extensas a números.[185] Vejamos:

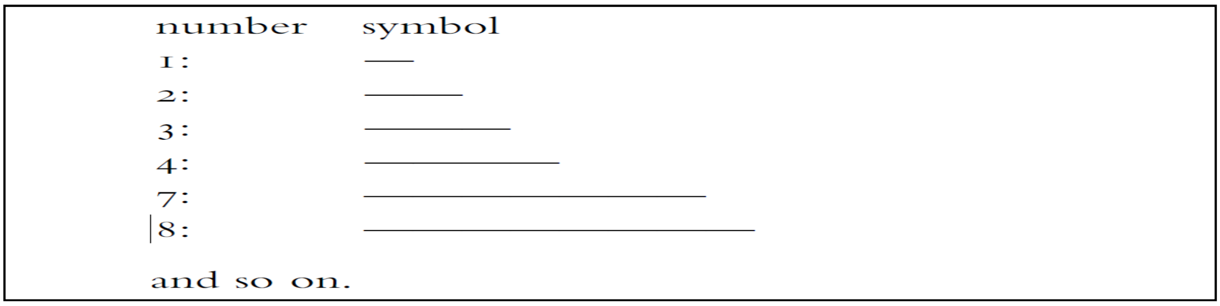


FIGURA 8. CAREY, 2009, p. 118

Essa imagem constitui “um sistema representacional de magnitude analógica externa em que comprimentos representam o número”[186], o qual é utilizado por Carey para afirmar que:

> Os adultos humanos, os bebês humanos e os animais não humanos implementam um sistema de representações analógicas de magnitude do número. O número é representado por uma magnitude física que é aproximadamente proporcional ao número de indivíduos no conjunto que está sendo enumerado.[187]

[185] Id. p. 118.
[186] Ibid. “[...] an external analog magnitude representational system in which lengths represent number.”
[187] Ibid. “Human adults, human infants, and nonhuman animals deploy a system of analog magnitude representations of number. Number is represented by a physical magnitude that is roughly proportional to the number of individuals in the set being enumerated.”
.

Carey nega que as crianças seriam como que *uma tábula rasa* – a existência de um sistema inato de representação numérica de grandezas, por si só, já aponta para a capacidade geométrica inata adquirida pelos animais humanos ao longo de milhões de anos de evolução, seleção e adaptação. A capacidade matemática fundamental – reconhecimento do espaço e do tempo – acaba por descobrir-se fundamentalmente inata e não exclusivamente humana. Certamente, o indivíduo humano – por meio da educação e da repetição – é capaz de elevar suas capacidades evolutivas primordiais a um nível de maior abstração. Contudo, o núcleo dessas capacidades é encontrado no cérebro humano; em bebês que, obviamente, não apreenderam geometria e aritmética. Logo, a cognição nuclear de bebês humanos com idade inferior a 1 ano "inclui mecanismos para selecionar conjuntos de indivíduos e quantificá-los com representações de número de magnitude analógica"[188].

Em relação à aritmética, a qual poderia constituir um problema para a defesa da cognição nuclear apresentada, Carey defende que:

> Pode-se objetar que a cognição da aritmética simbólica pode estar desempenhando um papel nas tarefas que envolvem computação - talvez os participantes estabeleçam valores cardeais aproximados dos conjuntos por meio de representações de magnitude analógicas; mapeá-los em números verbais; e depois adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir usando regras aritméticas simbólicas. Embora os participantes adultos neguem fazer isso, podemos garantir que as representações analógicas de magnitude estão apoiando os cálculos usando participantes que ainda não conhecem os fatos simbólicos aritméticos - crianças pré-escolares. Barth e seus colegas realizaram uma série de estudos, mostrando que as crianças de 4 a 6 anos tem sucesso na adição, subtração, na multiplicação por 2 e divisão por 2. [...] Os estudos de Barth ilustram o funcionamento das representações análogas de magnitude de número em tarefas que não envolvem representações linguísticas explícitas. John Whalen, Randy Gallistel e Rochel Gelman (1999) confirmaram recentemente que adultos humanos mapearam numerais linguísticos em representações numéricas analógicas de magnitude.[189]

[188] Id. p. 137 "[...] includes mechanisms for selecting sets of individuals and quantifying over them with analog magnitude number representations [...]".
[189] Id. p. 129. "One might object that cognition of symbolic arithmetic might be playing a role in the tasks that involve computation—perhaps participants establish approximate cardinal values of the sets via analog magnitude representations; map them onto verbal numerals; and then add, subtract, multiply or divide using symbolic arithmetic rules. Although adult participants deny doing this, we can ensure that analog magnitude representations themselves are supporting the calculations by using participants who do not yet know the symbolic arithmetic facts—preschool children. Barth and her colleagues have carried out a series of such studies, showing that 4 - to 6 - year-olds succeed at addition, subtraction, multiplication by 2, and division by 2 [...] Barth's studies illustrate the operation of analog magnitude representations of number in tasks that do not involve explicit linguistic number representations. John

Assim, representações analógicas de magnitude subjazem as operações aritméticas simbólicas. Este fato ressalta que não apenas o espaço, mas, também o tempo fazem parte da cognição primitiva, uma vez que a diferenciação proposta por Carey (1: ‐; 2:–; 3:—; 4:—— ...) implica o reconhecimento de grandezas e sua sucessão temporal. Logo, operações simbólicas e linguísticas não prescindem das capacidades biologicamente inatas da razão humana.

Além do sistema nuclear supracitado, Carey apresenta ainda um segundo, o sistema de *Individuação Paralela de Conjuntos Pequenos (Parallel Individuation of Small Sets)*[190]*, o* qual consiste em indivíduos na fase pré-verbal serem capazes de distinguirem conjuntos a partir do número de indivíduos no interior de tais conjuntos.

Carey afirma que:

> Concepções a respeito das origens das habilidades numéricas parecem gerar um desafio formidável. O número é a entidade numérica abstrata por excelência. Piaget acreditava que representações numéricas são construídas a partir de capacidades lógicas (a capacidade de ordenação linear e a capacidade de representação e operação de conjuntos), capacidades lógicas que não eram elas próprias construídas até os primeiros anos escolares. Consequentemente, ele acreditava que crianças não podiam representar números até então [...]. O sistema de objeto arquivo *(object - file system)* de representações engloba critérios de individuação e de identidade numérica para objetos, e crianças criam modelos de memória de trabalho que distinguem conjuntos com dois objetos numericamente distintos daqueles com três ou um objeto [...] crianças também criam modelos de memória de trabalho para conjuntos (*working-memory models of sets*) de diferentes tipos de indivíduos – eventos individuais, diferenças de tom individuais – e esses modelos de memória de trabalho tem muitas similaridades estruturais com aqueles que representam pequenos conjuntos de objetos [...] essas representações de ‘arquivo individual’ (*individual file representations*) são numéricas de maneiras que conflitam com a posição de Piaget.[191]

Whalen, Randy Gallistel, and Rochel Gelman [...] have recently confirmed that human adults have mapped linguistic numerals onto analog magnitude number representations.”

[190] Id. p. 137.

[191] CAREY, 2009, p. 117. “Accounting for the origins of human numerical abilities seems to pose a formidable challenge. Number is a quintessential abstract entity. Piaget believed that numerical representations are built from logical capacities (the capacity for linear order and the capacity to represent and operate over sets), logical capacities that were not themselves constructed until the early school years. Accordingly, he believed that children could not represent number until then […]. The object-file system of representations embodies criteria of individuation and numerical identity for objects, and infants create working memory models that distinguish sets with two numerically distinct objects from those with three objects or one object […] infants also create working-memory models of sets of different types of individuals—individual events, individual tone bursts—and these working-memory models have many structural similarities to those that represent small sets of objects […] these “individual file” representations are numerical in ways that conflict with Piaget’s position.”

Se tal sistema nuclear de fato subjaz a capacidade cognitiva humana, então a individuação numérica é uma faculdade inata, uma capacidade mental a qual permite que crianças da mais tenra idade – sem treinamento – possuam a faculdade cognitiva básica em relação ao espaço (grandeza) e ao tempo (sucessão numérica). O processo de diferenciação de grandezas - e de associação com os respectivos números – conjugado com a individuação de e diferenciação de objetos em um conjunto, demonstram a espacialidade e a sucessão temporal. Logo, espécies humanas e não humanas possuem faculdades mentais adquiridas anteriormente a qualquer experiência empírica, faculdades estas que foram formadas através de um processo evolutivo biológico.

Outro aspecto importante salientado por Carey é o de que esses dois sistemas nucleares não operam de maneira isolada de modo que a *Representação Analógica de Magnitudes* e a *Individuação Paralela de Conjuntos Pequenos* são mutuamente utilizados na cognição de bebês humanos:

> [...] lactentes distinguem pequenas séries com base no número de indivíduos neles. [...] esses dados fornecem evidências para representações de magnitude analógica em bebês pré-verbais [...]. E se assim for, que as representações de magnitude analógica subjazem o desempenho do bebê.[192]

A distinção de pequenas séries a partir do número de objetos em um conjunto necessita das representações analógicas de magnitude, de modo que essa iteração proporciona a contagem de indivíduos e a percepção da grandeza espacial dos objetos.

5.2 Sistemas de representação espacial

No artigo "Two systems of spatial representation underlying navigation" Lee e Spelke apresentam o sistema de navegação através da forma da superfície *(3D surface layout navigation)* como sendo um sistema inato, o qual efetivamente permite aos animais – humanos e não humanos) realizarem uma leitura espacial eficaz do ambiente em que se encontram a fim de se orientarem e navegarem por meio dele.[193]

[192] Id. p. 138. "[...] infants distinguish small sets on the basis of number of individuals in them. […] these data provide evidence for analog magnitude representations in preverbal infants […]. And if so, that analog magnitude representations underlie the infant's performance."
[193] LEE E SPELKE, 2010, p. 185.

A pesquisa neurocientífica de caráter cognitivista realizada em ratos demonstra que:

> Há evidências de que sistemas múltiplos de estruturas neurais especializadas subjazem o comportamento espacial. A pesquisa no hipocampo e regiões circunvizinhas resultou na identificação de regiões que processam a geometria do layout da superfície, mas não objetos de referência ou cores e padrões de superfície. Estudos de células monocelulares de células do lugar do hipocampo de ratos, que disparam quando um animal não treinado livremente se move para um local particular no ambiente, mostraram que as sugestões prolongadas, particularmente as paredes do espaço de teste, são cruciais para a representação da localização [...]. O hipocampo também tem sido mostrado para codificar a visualização de representações independentes do espaço, capturando as posições relativas dos elementos múltiplos no ambiente, ao invés de associações específicas de visão para marcos individuais. [194]

Ratos se guiam por meio da geometria da superfície ao invés de utilizarem marcadores como cores e pontos de referência. O hipocampo desses animais processa o espaço gerando *representações independentes* do múltiplo externo, gerando, de maneira separada, pontos referenciais. Estruturas neurais especializadas são condições para a espacialidade e, portanto, para a navegação. Embora ratos sejam animais não humanos podemos traçar um paralelo com a capacidade mental humana com respeito da apreensão do espaço. O hipocampo seria o detentor das estruturas neurais referentes ao espaço, de modo que a leitura espacial seria proporcionada de maneira biológica e evolutiva, uma vez que tais estruturas neurais são especializadas, i.e., abarcam as informações adquiridas ao longo do processo evolutivo.

A cognição espacial de animais humanos e não humanos é fundamentalmente neural, i.e., as configurações cerebrais humanas proporcionam a compreensão do espaço; proporcionam uma compreensão básica e rudimentar que, contudo, é inata e proporciona o desenvolvimento geométrico posterior. Nós

[194] Id. p. 181. “[...] there is evidence that multiple systems of specialized neural structures underlie spatial behavior [...] Research on the hippocampus and surrounding regions has resulted in the identification of regions that process surface layout geometry but not landmark objects or surface colors and patterns. Single-cell recording studies of rats’ hippocampal place cells, which fire when an untrained, freely moving animal moves to a particular location in the environment, have shown that extended cues, particularly walls of the testing space, are crucial to the representation of location [...]. The hippocampus has also been shown to encode view independent representations of space, capturing the relative positions of multiple elements in the environment, rather than view-specific associations to individual landmarks.”

nascemos com a capacidade de diferenciar as nuances do espaço escaneadas pelos sentidos, de modo a podermos localizar inclusive a nós mesmos em meio ao múltiplo, o qual – sem essa capacidade inata - seria uma imagem monolítica sem sentido e totalmente incompreensível. Lee & Spelke afirmam:

> Nos seres humanos, estudos de neuroimagem funcional mostraram ativação preferencial do hipocampo posterior direito para locais de processamento com respeito aos limites ambientais e ativação do estriado dorsal direito para localizações relacionadas com marcos [...] pesquisadores forneceram evidências comportamentais de que - usando a mesmas disposições visuais e a função da memória espacial - embora a aprendizagem relacionada a objetos obedeça a princípios de reforço associativo, a aprendizagem relacionada a limites é incidental, consistente com os resultados [...] de estudos comportamentais de animais.[195]

Assim, a capacidade cerebral humana no tocante à espacialidade é semelhante – ou mesmo idêntica - com a maioria dos animais não humanos. A compreensão dos limites espaciais é *incidental,* i.e., não é fruto de condicionamento e aprendizagem, mas, é uma reação espontânea do cérebro frente ao múltiplo espacial externo.

5.3 Kant e o cognitivismo: entre o empirismo e o inatismo

A partir das explicações naturalistas para a espacialidade e a temporalidade, nos moveremos em direção à interpretação cognitivista da filosofia kantiana, com foco nas formas da intuição pura (espaço e tempo). O debate entre o empirismo e o inatismo apresenta uma terceira categoria, a saber, o nativismo. Para compreendermos o nativismo precisamos compreender o quadro geral das teorias cognitivas clássicas. O nativismo, segundo Falkenstein, é composto por dois extremos: o inatismo de Descartes (o qual é de caráter construtivista em relação à mecânica inata) e o intuicionismo extra-sensorial de Platão. Entre tais extremos se encontra o empirismo, que possui pelo menos duas ramificações: uma no intuicionismo sensitivista aristotélico - em relação à percepção das cores e outra no

[195] Ibid. “In humans, functional neuroimaging studies have shown preferential activation of the right posterior hippocampus for processing locations with respect to environmental boundaries and activation of the right dorsal striatum for landmark-related locations [...] researchers provided behavioral evidence, using the same visual displays and spatial memory task, that while object related learning obeys associative reinforcement principles, boundary-related learning is incidental, consistent with the [...] findings from behavioral studies of animals.”

intuicionismo não sensitivista de Kant.[196] Deste modo, Kant compartilharia aspectos empiristas e intuicionistas sem, entretanto, poder ser tido como nativista. Seu intuicionismo – relativo à cognição do espaço e do tempo – não é, de maneira alguma, semelhante ao de Platão e Aristóteles, como também, é radicalmente diferente do inatismo de Descartes. O intuicionismo não sensitivista apresentado por Kant constitui uma "teoria da forma da Intuição"[197] de cunho realista em relação ao empirismo. O idealismo transcendental de Kant é empiricamente realista., i.e., seu intuicionismo gera um conhecimento objetivo em relação ao mundo externo, de modo que a síntese realizada pela forma da intuição e a representação mental não constitui um expediente subjetivista ou antirrealista. Embora nós não conheçamos as coisas em si mesmas, e sim os fenômenos, nós não temos um conhecimento epistemicamente desqualificado, uma vez que, ao conhecermos as coisas conforme elas se apresentam a nós estamos obtendo o mais perfeito grau de conhecimento possível, através de uma estrutura cognitiva compartilhada por todos os seres racionais humanos. Falkenstein afirma que:

> O principal problema com as concepções construtivistas tradicionais e com as concepções nativistas (ideias inatas) para a cognição espaço-temporal em Kant não é que eles invocam o processamento ou as ideias inatas. [...] o relato de Kant apela para o processamento (embora apenas para a representação objetiva de nível superior do espaço e do tempo) e à nossa constituição inata (embora o papel que essa constituição tem de desempenhar não é tão grande como muitas vezes foi imaginado). Essas posições devem ser criticadas porque obscureceram a existência de uma ordem espaço-temporal primitiva dada na intuição. Como resultado, elas nos cegaram quanto a existência de uma contribuição única e profunda que Kant realizou na teoria da cognição do espaço e do tempo [...].[198]

Carlos Ferraz, seguindo o caminho apontado por Falkenstein, afirma que Kant "não era um empirista, nem um sensitivista, estritamente falando [...] Kant estava no

[196] Cf. FALKENSTEIN, 1990, p. 580.
[197] FALKENSTEIN, 1990, p. 580. "[...] form of intuition theory [...]."
[198] Id. p. 597. "The main problem with the traditional constructivist and innate-ideas nativist approaches to space- and time-cognition in Kant is not that they invoke processing or innate ideas. [...] Kant's account does appeal to processing (though only for the higher-level objective representation of space and time) and to our innate constitution (though the role this constitution has to play is not as large as has often been imagined). These positions are rather to be faulted because they have obscured the existence of a primitive spatiotemporal order given in intuition. As a result, they have blinded us to the existence of a unique and profound contribution Kant had to make to the theory of space- and time-cognition [...]."

meio: ele não era nem um empirista nem um nativista”[199]. Ferraz propõe uma interessante chave de leitura para a interpretação do processo cognitivo transcendental kantiano:

> Uma maneira interessante de apresentá-la é usando uma linguagem mais atualizada. De acordo com a concepção atual sobre a mente, ela funciona como dispositivos tais como computadores. Desse modo, nós temos inputs, um processamento desses inputs (o processamento da informação) e um output. Mas o ponto é que Kant não era um classicista. Na perspectiva de Kant, a mente não apenas espelha o mundo. Não é um mero dispositivo de recuperação passiva. Mesmo usando essa linguagem atualizada, expressa em conceitos computacionais, poderíamos pensar não apenas em termos de solução de problemas (computacionais). O processo cognitivo interno do organismo envolve não apenas computação e representação, mas também é ‘moldado’ pela sua relação com o ambiente. Em outras palavras, por meio da entrada de informações no sistema, o que provoca uma cadeia de eventos dentro do dispositivo/mente. Esse é o processamento em si. No final deste mesmo processo temos o output.[200]

A teoria kantiana não pode ser lida por meio de termos meramente computacionais, uma vez que a participação da mente não é passiva no processamento dos objetos do mundo externo. Nessa relação mente-ambiente, as formas puras da intuição – o espaço e o tempo – “não estão prontas para nós as usarmos, ou seja, não são dados inatamente em nossas mentes”[201]. Kant não era um inatista, logo o que de fato “é inato é o caráter formal do sujeito”[202]. Isso significa que o intuicionismo kantiano é baseado na constituição da mente, a qual é capaz de - ao ser afetada pelos objetos - obter representação imediata dos mesmos, representação esta que nada mais do que intuição. Tais considerações são de caráter epistemológico geral consoante a teoria kantiana. Mas, podemos aplicá-las aos juízos matemáticos,

[199] FERRAZ, 2014, p. 162. “[...] was not himself an empiricist, nor a sensationist, strictly speaking. I think Kant was in between: he was neither an empiricist nor a nativist.”
[200] Ibid. “An interesting way of setting it forth is by using a more up-to-date language. According to the current image regarding the mind, it works like devices such as computers. So we have inputs, a processing of these inputs (the information processing), and an output. But the point is that Kant was not a classicist. In Kant’s perspective, the mind does not only mirror the world. It is not a mere passive retrieval device. Even using that up-to-date language, expressed in computational concepts, we might think not only in terms of problem-solving (computational) operations. The organism’s internal cognitive process involves not only computation and representation, but it is also “molded” by its relation with the environment. In other words, through the input information gets into the system, which causes a chain of events inside the device/mind. That is the processing itself taking place. At the end of this same process we have the output.”
[201] Id. p. 163 “[...] are not ready for us to use them, that is, they are not given innately in our minds [...].”
[202] Ibid. “[...] is innate is the formal character of the subject [...].”

uma vez que a intuição pura do espaço e do tempo se manifesta quando nossa mente é direta ou indiretamente afetada por grandezas e quantidades. Ao pensarmos em um triângulo, a representação manifesta uma intuição espacial, do mesmo modo que, ao representarmos uma sequência numérica na mente, tal representação manifesta uma intuição temporal via iteração sucessiva.

Por fim, levando em conta o caráter inato da constituição do sujeito e não das categorias do espaço e do tempo, podemos traçar - sob o ponto de vista evolutivo - um paralelo entre a aquisição das disposições intuitivas do espaço e do tempo com a aquisição da linguagem e da capacidade de expressarmos emoções. Ferraz afirma que conforme Darwin, a linguagem é resultado de um processo evolutivo adquirido a partir de nossos ancestrais através da imitação da natureza. Tal integração mente-ambiente gerou - por meio da plasticidade cerebral - o desenvolvimento fisiológico necessário para a linguagem conforme a conhecemos.[203]

A capacidade de expressarmos emoções é algo igualmente herdado de nossos ancestrais e desenvolvido fisiologicamente ao longo do tempo, "ela se tornou, em algum ponto, inata[204], mas "inato aqui significa apenas que isso (a expressão de nossas emoções) foi 'integrado' em nosso sistema biológico durante nossa história evolucionária"[205]. A partir dessas duas descrições do processo evolutivo da linguagem e da expressão das emoções podemos afirmar que as categorias do espaço e do tempo – enquanto formas da intuição pura, embora não pudessem ser apropriadamente demonstradas ou provadas por Kant, são disposições da mente adquiridas ao longo de nossa evolução. Nós adquirimos a condição de unificar e de abstrair o múltiplo espacial oriundo dos sentidos, bem como, de unificar e abstrair as séries de eventos em uma sequência, por meio de um processo biológico evolutivo. Logo, tais disposições mentais "são inatas porque, em algum momento, elas eram importantes para nós sermos uma espécie bem adaptada. Isso era o que Darwin chamava de uma visão Lamarkeana"[206]. Logo, o mapeamento cognitivo realizado por Kant em uma era pré-Darwinista não estava completamente errado, mas, pelo

[203] Cf. FERRAZ, 2014, p. 170.
[204] Id. p. 170. "[...] It became, at some moment, innate [...]."
[205] Ibid. "[...] And innate here only means that it (the expression of our emotions) was 'integrated' into our biological system during our evolutionary history."
[206] Ibid. "[...] they are innate because, at some point, they were important for us to be a well-adapted species. That is what Darwin himself called a 'Lamarckian view'."

contrário, permitiu que a intuição pura servisse como uma *guardadora de lugar* para as disposições mentais explicadas à luz do cognitivismo.

Considerações Finais

Após verificarmos que a agenda do Intuicionismo e a do Logicismo são fundamentalmente diferentes, podemos chegar a algumas conclusões, a saber:

(i) A intuição pura do tempo foi um grande divisor de águas na história da filosofia da matemática. Tal expediente possibilitou o ancoramento dos juízos matemáticos na mente de um sujeito pensante sem o recurso a algum expediente reducionista e arbitrário como a lógica geral de Leibniz. A utilização da intuição pura do tempo parece deveras mais aceitável – para a fundamentação da matemática – do que o simples critério de não contradição, o qual não fornece base epistemológica alguma, mas sim, apenas um critério de correção formal e ulterior ao ajuizamento matemático. O fato de a intuição pura não poder ter sido demonstrada em bases propriamente científicas não a invalida como sendo semelhante a disposições mentais humanas utilizadas na construção numérica. Kant estava preocupado com as condições de possibilidade do conhecimento matemático real – ou seja, com as bases da construção matemática efetivamente empreendida por seres humanos que possuem o aparato epistemológico necessário para a manipulação de grandezas – e não com a mera forma do pensamento; (ii) o fato de Frege aceitar a existência da intuição pura do espaço – relativamente à geometria – e não aceitar a intuição pura do tempo – como base epistêmica para a aritmética – cria uma fissura em sua teoria. Ao defender que a aritmética não necessita de fundamentos epistêmicos propriamente ditos, apresenta a lógica formal como pano de fundo do raciocínio numérico. E, uma vez que a lógica formal – ao não proporcionar nenhum tipo de fundamentação epistemológica – é de caráter apenas instrumental, a filosofia da matemática acaba por sofrer um retrocesso – em direção a Leibniz – bem como, faz com que o raciocínio aritmético fique restrito a especialistas. Assim, apenas sujeitos conhecedores do aparato da lógica formal poderiam realizar operações numéricas. Ora, o problema abordado por Kant é substancialmente diferente. Ele trata da cognição matemática em nível primário, no qual o sujeito é visto como não possuindo – ainda – o conhecimento lógico formal quantificacional necessário para a realização de operações aritméticas. Logo, pode-se afirmar que, apesar da importância e da validade da lógica – enquanto base formal e critério de correção para a matemática – o intuicionismo apresentado por Kant pode contribuir para o raciocínio aritmético, uma vez que os problemas da fundamentação epistemológica mental da matemática não estão esgotados. Passar por cima de tal fundamentação consiste em um expediente errôneo, utilizado em nome de um programa que afirmava uma formalidade e uma objetividade deveras acentuada sem critérios epistemológicos; (iii) Frege e Russell consideram a teoria kantiana como sendo obsoleta, uma vez que a *intuição pura* seria um expediente desnecessário para a formulação de juízos sintéticos a priori na aritmética. Nessa perspectiva, ocorre como que um retrocesso e uma retomada do projeto Leibniziano. Essa crítica à filosofia da matemática kantiana acaba por pôr a perder todo o projeto epistemológico de Kant, i. e., todo o idealismo transcendental. O logicismo de Frege constitui um vocabulário formal que – embora almeje – não pode prescindir da intuição pura do tempo a fim de constituir uma teoria matemática completa e não meramente *ad hoc*. Já o programa de Russell apresenta um realismo extremo e, por vezes, ingênuo. Tal realismo visa elevar a matemática ao nível científico, mas, entretanto, tal tentativa se mostra frustrada. Realizamos a constatação de que o logicismo não seria possível – enquanto expediente ulterior e formal – sem a intuição temporal pura defendida por Kant; e (iv) os conceitos de espaço e tempo enquanto disposições mentais não são desconhecidas pelas ciências cognitivas, mas, pelo contrário, constituem um ponto primordial para a pesquisa acerca da cognição humana. O fato de as ciências cognitivas poderem ter se desenvolvido apenas na contemporaneidade - isto é, após o surgimento da Teoria da Evolução de Darwin e do desenvolvimento de métodos e equipamentos apropriados – nos mostrou que o projeto intuicionista kantiano mapeou adequadamente a cognição espaço-temporal, embora tal mapeamento não lidasse com as bases biológicas do conhecimento. Desse modo, a intuição pura do espaço e do tempo permanece com a tarefa de guardar lugar para as faculdades mentais inatas interpretadas à luz da ciência contemporânea, uma vez que – conforme vimos no último capítulo – a mente humana desenvolveu evolutivamente a cognição do espaço e do tempo. Contudo, a tarefa de investigar as categorias do espaço e do tempo - a fim de estabelecer a natureza da intuição *a priori* - por meio das ciências cognitivas, constitui uma tarefa inacabada que deve ser constantemente retomada. Kant, por motivos óbvios, não era um darwinista, mas, contudo, teve o *insight* correto quanto à necessidade de a mente humana desempenhar um papel ativo na apreensão do espaço e do tempo, por meio da intuição pura enquanto disposição mental própria aos seres humanos. Disposição esta que pode, conforme demonstrado anteriormente, ser reinterpretada de modo a que possamos conferir o mérito devido à teoria kantiana.

Referências Bibliográficas

ALISSON, Henry. *Kant's Transcendental Idealism. An Interpretation and Defense.* New Haven: Yale University Press, 1983.

ARCOZZI, Nicola. Beltrami's Models of Non-Euclidean Geometry. *Mathematicians in Bologna 1861-1960*. New York: Springer Basel, 2012, p. 1-30.

BELTRAMI, Eugenio. Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea. *Giornale di Matematiche,* VI (1868). Trento: Università di Napoli, 1868, p. 284-322.

CAREY, Susan. *The Origin of Concepts.* New York: Oxford University Press, 2009.

COFFA, J. Alberto. *The semantic tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station.* (Edited by Linda Wessels). Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

CUMMINS, Phillip. Kant on Outer and Inner Intuition. *Noûs,* Vol. 2, No. 3 (Aug., 1968). New Jersey: Wiley, 1968, p. 271-292.

DARWIN, Charles. *On The origin of species by means of natural selection or the preservation of favoured races in the struggle for life.* (First Edition published by John Murray, London, 1859). London: Elecbook, 1997.

DUMMETT, Michael. *Frege Philosophy of Language*. London: Harper & Row Publishers, 1973.

EUCLID. The Elements. *Euclid's Elements of Geometry: The Greek text of J.L. Heiberg* (1883–1885) from Euclidis Elementa, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick)). London: Lightning Source, 2007.

FALKENSTEIN, Lorne. Was Kant a Nativist? *Journal of the History of Ideas*, Vol. 51, No. 4 (Oct. - Dec., 1990). Philadelphia: University of Pennsylvania Press, 1990, p. 573-597.

FERRAZ, Carlos. Practical embodied cognition as a constructive process: Towards a more complex idea of the world by acting on it. *Filosofia Unisinos,* 15 (3), sep/dec 2014. São Leopoldo: Unisinos, 2014, p. 161-172.

FREGE, Gottlob. *The Foundations of Arithmetic.* New York: Harper Brothers, 1960.

FRIEDMAN, Michael. Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences. *Synthese,* Vol. 84, No. 2, The Philosophy of Mathematics, Part I (Aug., 1990). New York: Springer, 1990, p. 213-257.

_______.*Kant and the Exact Sciences.* Cambridge: Harvard University Press, 1992.

GODWIN, Martin; IRVINE, Andrew D. Bertrand Russell's Logicism. In: GRIFIN, Nicholas (Ed.). *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*. New York: Cambridge University Press, 2003, p. 171-201.

GRIFIN, Nicholas (Ed). *The Cambridge Companion to Bertrand Russell.* New York: Cambridge University Press, 2003.

_______. Russell's Philosophical Background. In: GRIFIN, Nicholas (Ed.). *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*. New York: Cambridge University Press, 2003, p. 84-107.

HANNA, Robert. *Kant and the Foundations of Analytic Philosophy.* Oxford: Clarendon Press, 2001.

_______. Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of Arithmetic Revisited. *European Journal of Philosophy,* 10:3. Oxford: Blackwell, 2002, p. 328-353.

HINTIKKA, Jaakko. *The Philosophy of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 1969.

KANT, Immanuel. *Werke.* (AkademieTextausgabe). Berlim: Walter de Gruyter & Co, 1968.

_______. *Correspondence.* (The Cambridge Edition of the Works of Immanuel Kant). Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

_______. *Critique of PureReason*. (Translated by Norman Kemp Smith). London: Macmillan and Co.,1929.

_______. *Da utilidade de uma nova Crítica da Razão Pura.* São Paulo: Hemus, 1975.

KITCHER, Philip. Kant and the Foundations of Mathematics. *The Philosophical Review,* Vol. 84, No. 1. (Jan., 1975). Ithaca: Cornell University, 1975, p. 23-50.

KJOSAVIK, Frode. Kant on Geometrical Intuition and the Foundations of Mathematics. *Kant-Studien.* Volume 100, Issue 1, April 2009. New York: Walter de Gruyter, 2009, p 1-27.

LEE, Sang Ah; SPELKE, Elizabeth S. Two Systems of Spatial Representation Underlying Navigation. *Experimental Brain Research*, Vol. 206. Heidelberg: Springer, 2010, p. 179-188.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm von. *Leibniz-Clarke Correspondence.* Manchester: Manchester University Press: 1956.

_______. *The Monadology.* (Traslated by Robert Latta). London: Oxford University Press, 1898.

LOBACHEVSKY, Nikolai I. *Pangeometry.* (Edited and translated by Athanase Papadopoulos). Zürich: European Mathematical Society Publishing House, 2010.

MACFARLANE, John. Frege, Kant, and the Logic in Logicism. *Philosophical Review* January 2002 111(1). Durham: Duke University Press, 2002, p. 25-65.

MILODINOW, Leonard. *Euclid's Window.* New York: Free Press, 2001.

PINOSIO, Riccardo. Kant's transcendental synthesis of the imagination and constructive Euclidean geometry. 1987. 83 f. Dissertação de Mestrado (Mestre em Lógica)-Curso de Filosofia, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 1987.

POSY, C.J. (Ed.) *Kant's Philosophy of Mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

RISJORD, Mark. The Sensible Foundation for Mathematics: A Defense of Kant's View. *Stud. Hist. Phil. Sci.*,Vol. 21, No. 1. Oxford: Pergamon Press, 1990, p. 123-143.

RUSSELL, Bertrand. *The Principles of Mathematics.* New York: W. W. Norton & Company, 1996.

SLUGA, Kans D. Gottlob Frege. In: HONDERICH, Ted (Ed.). *The Arguments of the Philosophers*. New York: Routledge, 1999.

SMITH, Norman Kemp. *A Commentary to Kant's 'Critique of Pure Reason'.* London: Macmillan and co., limited, 1918.

SNAPPER, Ernst. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism. *Mathematics Magazine, Vol 52, No. 4.* Washington, 1979, p. *208-216*.

STEIN, Sofia Inês Albornoz. Aspectos Convencionalistas da Filosofia de Willard Quine. *Principia* (1–2) 2003. Florianópolis: UFSC, 2003, p. 185–203.

VALTONEN, M. From Newton to Einstein. In: VALTONEN, Mauri (et. al.). *The Three-body Problem from Pythagoras to Hawking.* Basel: Springer International Publishing Switzerland, 2016, p. 31 – 49.

WINTERBOURNE, A.T. Construction and the role of schematism in Kant's Philosophy of Mathematics. *Trans/Form/Ação.* Vol. 13, Jan. 1990. Marília: Unesp, 1990, p. 107-121.

YOUNG, J. Michael. Construction, Schematism, and Imagination. In: POSY, C. J. (Ed.). *Kant's Philosophy of Mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992, p 159-175.