UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS-UNISINOS
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO CONTINUADA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

GREICE BORGES QUEQUI

FUNÇÃO QUADRÁTICA: MODELAGEM MATEMÁTICA NO LANÇAMENTO DE UM FOGUETE

SÃO LEOPOLDO
2015

GREICE BORGES QUEQUI

FUNÇÃO QUADRÁTICA: MODELAGEM MATEMÁTICA NO LANÇAMENTO DE UM FOGUETE

Trabalho de conclusão de curso de Especialização em Educação Matemática da Unidade Acadêmica de Educação Continuada da Universidade do Vale dos Sinos - Unisinos.

Orientador: Prof. Ms. Fábio Luiz Fontes Martins

SÃO LEOPOLDO
2015

Greice Borges Quequi

FUNÇÃO QUADRÁTICA: MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DO LANÇAMENTO DE UM FOGUETE

Trabalho de conclusão de curso de Especialização em Educação Matemática da Unidade Acadêmica de Educação Continuada da Universidade do Vale dos Sinos - Unisinos.
Orientador: Profº Ms. Fábio Luiz Fontes Martins

____
Prof. Ms. FábioLuiz Fontes Martins –Professor da Unidade Acadêmica de Educação Continuada - Unisinos

____
Profª Ms. Marjúnia Edita Zimmer Klein - Professora da Unidade Acadêmica de Educação Continuada - Unisinos

RESUMO

A matemática está presente em vários aspectos da nossa vida, os quais estão relacionados a outras ciências, como Biologia, Química e Física, contribuindo para análise de situações e tomadas de decisões na resolução de situações diversas. Este trabalho tem como tema o ensino-aprendizagem da função quadrática através da modelagem matemática. E aborda a compreensão da função no lançamento oblíquo de um foguete d'água. Elaboramos uma atividade prática que foi aplicada com alunos do 1º ano do ensino médionum colégio particular de Porto Alegre tendo como objetivo mostrar como a física e a matemática são aplicadas na realidade e como os modelos matemáticos estão estruturados. Nesta pesquisa propomos um roteiro que utilizou de uma filmagem do lançamento do foguete. Com uso do *software Tracker*, os estudantes analisaram os pontos coordenados do lançamento e desenvolveram os modelos matemáticos.

PALAVRAS-CHAVE: Função quadrática, Ensino Médio, modelagem matemática.

ABSTRACT

Mathematics is present in many aspects of life related to other sciences as biology, chemistry and physics, contributing to situation analysis and decision making in solving various situations. This work has as its theme the teaching-learning quadratic function through mathematical modeling. And it addresses the understanding of the function in the oblique launch of a rocket water. We developed a practical activity that has been applied with the 1st year high school students in a private school of Porto Alegre aiming to show how physics and mathematics are applied in reality and how mathematical models are structured. In this research we propose a script which used a film of the rocket launch. With use of the Tracker software, students analyzed the coordinated launch points and developed mathematical models.

KEYWORDS: quadratic function, High school, mathematical modeling.

INTRODUÇÃO

A matemática está presente em muitos aspectos do nosso cotidiano, os quais estão relacionados a outras áreas do conhecimento, como a Física, a Biologia, a Geografia, entre outras, contribuindo para análises de situações reais e suas respectivas problematizações. Como professora de matemática do primeiro ano do Ensino Médio, tenho muitas indagações a respeito de como e de que forma alguns conteúdos matemáticos são ou poderiam ser abordados, pois estamos na era em que os alunos são “nativos digitais” e as aulas tradicionais ficam cada vez menos atrativas. Os professores têm de desenvolver técnicas e habilidades para chamar a atenção dos alunos frente a toda essa interatividade.

Durante três anos, trabalhei em um Laboratório de Matemática de uma escola privada de Porto Alegre. Naquela oportunidade, organizava e preparava oficinas, muitas vezes, aulas práticas ou, até mesmo, aulas interdisciplinares envolvendo as disciplinas de Física e Biologia. Ao preparar essas dinâmicas, comecei a me questionar sobre o quanto essa aula prática era importante e se seria possível que essas abordagens fossem introduzidas como início de conteúdos programáticos da escola em que trabalho. Quando assumi turmas do Ensino Médio, esses questionamentos ficaram mais evidentes, pois, a cada aula, passei a refletir sobre como abordar ou conduzir os alunos a questionamentos por meio de problemas reais que os desafiassem a pensar.

Cada vez mais me convenço de que trabalhar a matemática de forma interdisciplinar leva o sujeito a pensar sobre o seu papel como cidadão na sociedade. Assim, é possível desenvolver no aluno o seu pensamento algébrico, a sua linguagem matemática, fazendo conexões com outras áreas. Dessa forma, a modelagem matemática tem modificado meus conceitos sobre o ensino-aprendizagem desta ciência:

> [...] “A modelagem matemática permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.” (BASSANEZI, 2002).

Com a afinidade cada vez maior com a Modelagem Matemática, surgiu um projeto em conjunto, proposto pelo professor do Laboratório de Física: o foguete de água. Nesta ação, os alunos da 1ª série do Ensino Médio estudaram o lançamento oblíquo, mediante a realização de um trabalho interdisciplinar, envolvendo as disciplinas de Matemática e Física. Os estudantes conheceram um pouco da história do primeiro foguete lançado no mundo, durante a Segunda Guerra Mundial. Construíram e lançaram o foguete na sede campestre do colégio e, após, utilizaram um *software* para análise da trajetória, assim como para a modelagem da função quadrática.

Em relação ao método científico, solicitou-se aos estudantes que filmassem o lançamento do foguete e, depois, em outro momento, utilizassem o *software Tracker* para anotar, propor, fazer interferências e discutir o trabalho, relacionando Física e Matemática, através de um roteiro.

Outro aspecto que pretendo abordar aqui é a apresentação dos resultados dos alunos e de suas conclusões. E, por fim, discutir a importância de atividades multidisciplinares, o uso da tecnologia e, principalmente, a construção de modelos matemáticos relacionados aos movimentos da física.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Conforme Kluber e Burak (2012), a Modelagem Matemática tem se consolidado na Educação Matemática ao longo dos últimos anos devido aos vários eventos, encontros e seminários com relatos de experiência e pesquisas na área. Pretendo apresentar e analisar três autores principais para o estudo e para a pesquisa da Modelagem Matemática, são eles: Bassanezi, Barbosa e Burak.

Um dos primeiros a implantar a modelagem no Brasil foi Rodney Carlos Bassanezi. Ele afirma que a Modelagem Matemática é o processo utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização de um modelo que consiste em transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser interpretadas com linguagem matemática usual. Bassanezi afirma:

> [...] "As vantagens do emprego da modelagem em termos de pesquisa podem ser constatadas nos avanços obtidos em vários campos, como a Física, a Química, a Biologia e a Astrofísica entre outros. A modelagem pressupõe multidisciplinariedade." (BASSANEZI, 2002)

Ou seja, por muitas vezes, a modelagem está envolvida em avanços tecnológicos, ela é multidisciplinar, pois utiliza outras disciplinas para aplicar Matemática e, como o autor mesmo afirma, é uma tendência atual nas áreas de pesquisa. A aprendizagem por meio da modelagem combina aplicações nas áreas da ciência com aspectos lúdicos, o que torna as aulas, muitas vezes, atrativas para os nativos digitais.

As teorias matemáticas, muitas vezes, são apresentadas de maneira acabada, pronta, desvinculada da realidade. Segue sempre o mesmo esquema, na maioria das vezes, enunciação, demonstração e aplicação, nesta ordem, sendo sugerido, segundo Bassanezi (2002), o efeito inverso, motivação, formação e validação das hipóteses, além de novos questionamentos e depois o enunciado. O autor sugere que tenhamos argumentos de aprendizagem, pois os procedimentos sugeridos pelos professores envolvidos no projeto e aqui relatados têm a intenção de que os processos aplicativos do foguete facilitem a compreensão da trajetória e da curva desenhada e estudada.

> [...] “A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno como seu ambiente natural.” (BASSANEZI, 2002)

O professor de Matemática deve ficar atento, pois a modelagem matemática deve ser utilizada como um método alternativo, proporcionando ao educando uma melhor compreensão da teoria no ensino de Matemática. Desta forma, o professor, como mediador da informação,deve sempre buscar a metodologia de ensino em cada caso específico e traçar uma linha,conduzindo o aluno a uma aprendizagem mais significativa.

Para Barbosa (2001), a modelagem é um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Estas se constituem como integrantes de outras disciplinas ou do dia a dia, sendo que seus atributos e dados quantitativos existem em determinadas circunstâncias. Consideramos essa concepção de modelagem apropriada para a educação matemática, pois, da forma como é apresentada, não está de acordo com os conteúdos programáticos nem com o objetivo específico da construção de modelos. Esse ambiente é um “convite” feito aos estudantes, sendo possível que eles não se envolvam nas atividades. Assim, os interesses dos educandos devem ir ao encontro da proposta colocada pelo professor. Esse entendimento sobre modelagem é conduzido por meio de indagações em que o aluno acompanha todo o processo da resolução.

Consideramos que o ambiente de aprendizagem descrito por Barbosa acerca da modelagem pode se configurar através de três níveis.

Nível 1:Trata-se da “problematização” de algum episódio “real”. A uma dada situação, associam-se problemas. A partir das informações qualitativas e quantitativas apresentadas no texto da situação, o aluno desenvolve a investigação do problema proposto.
Nível 2:O professor apresenta um problema aplicado, mas os dados são coletados pelos próprios alunos durante o processo de investigação.
Nível 3:A partir de um tema gerador, os alunos coletam informações qualitativas e quantitativas, formulam e solucionam problemas.

Apresentando e analisando as concepções de Burak, conforme Klubër (2008), as suas primeiras concepções foram mais tecnicistas na Matemática Aplicada, ou seja, mais situações científicas nos mesmos moldes da ciência. Depois, ao longo do tempo, Klubër considerou que a modelagem deveria ser contextualizada e mais aberta, dando significado aos conteúdos matemáticos. Após seu doutorado, frisou que o interesse dos participantes na atividade era importante e melhorava o envolvimento na busca de dados.

Ele descreve a modelagem em cinco etapas: escolha de tema (momento no qual o professor sugere temas ou os alunos escolhem um tema de interesse próprio), pesquisa exploratória (orienta os alunos a procurar subsídios, materiais e informações sobre o que se quer pesquisar) e levantamento dos problemas (alunos reúnem seus materiais e com a ajuda do professor elaboram problemas sobre o assunto juntamente com o que querem aprender ou aprofundar em Matemática), bem como a resolução de problemas,o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto (responder os questionamentos com auxílio dos conteúdos matemáticos) e a análise crítica (reflexão sobre a pesquisa, sobre os problemas formulados e o quanto os modelos são viáveis comparando a realidade e o ideal matemático). Ou seja, é através de projetos de pesquisa que se desenvolve a modelagem matemática:

> [...] Subentende-se, portanto, que é fundamental, a partir dos problemas/situações levantados, que se ministrem alguns conteúdos matemáticos com vistas à resolução ou resoluções daqueles. (KLUBËR e BURAK 2008).

Nesta perspectiva, o professor mediador alimenta o aluno com os interesses necessários ao desenvolvimento das habilidades matemáticas dentro dos conteúdos relacionados com a realidade.

Este trabalho vai ao encontro desses três autores, apresentando três concepções sobre modelagem matemática, que direcionam a experiência, a pesquisa e a prática da construção do lançamento do foguete de água, utilizando o desenvolvimento do aprendizado de funções. Portanto, a modelagem matemática vai além dos limites matemáticos, havendo de fato interdisciplinaridade de outras áreas do conhecimento, neste caso, a Física.

METODOLOGIA

A pesquisa foi desenvolvida no primeiro ano do Ensino Médio,ao longo do segundo trimestre.A escolha do tema de pesquisa sobre Funções deveu-se ao assunto tratado tanto pela Matemática como pela Física e aos movimentos que envolvem Funções. Os alunos foram divididos em grupos de cinco integrantes para o desenvolvimento do projeto.

A atividade foi desenvolvida em três aulas. A primeira aula consistiu em uma breve explanação sobre o histórico do desenvolvimento dos foguetes na Segunda Guerra Mundial, contando com a exposição de um vídeo e uma orientação para a construção de foguetes de água, utilizando garrafas PET. A seguir, foi orientado aos alunos que assistissem a montagem do foguete através da MOBFOG – OBA (Mostra Brasileira de Foguetes – Olimpíada Brasileira de Astronomia), na qual “utiliza-se garrafas PET, que após uma breve adaptação que inclui o acoplamento de aletas de papelão ou filme radiográfico, terá uma aerodinâmica que permitirá os efeitos contra-aerodinâmicos”, conforme Bexiga, Bruscato e Gomes (2014). Os foguetes foram construídos em casa pelos alunos.

Na segunda aula, fomos à sede campestre do colégio para a realização dos lançamentos dos foguetes com propulsores de água e ar comprimido. Nesse dia, os estudantes foram orientados a filmar seus lançamentos.

Na terceira aula, os discentes utilizaram o *software Tracker* para, através dos vídeos produzidos, determinar o alcance e a altura máxima atingidos por cada foguete, além de estimar as velocidades e as acelerações envolvidas no movimento. Nesta etapa, os estudantes seguiram um roteiro descrevendo como deveriam anotar, analisar e modelar os movimentos físicos, relacionando-os com a Matemática e formulando funções afim e quadrática.

DA MONTAGEM AO LANÇAMENTO DO FOGUETE

Os alunos construíram, nas suas casas,em grupos de quatro a cinco integrantes, seus foguetes.A primeira aula,ministrada pelo professor do Laboratório de Física, serviu para as primeiras orientações de como construir o foguete de água. Além disso, serviu também como motivação tanto em relação a sua construção quanto, consequentemente, em relação a sua importância histórica– com ajuda de um vídeo.

O foguete é constituído por duas garrafas PET acopladas, conforme a foto a seguir. Sobre a movimentação do foguete, temos que:

> “O movimento do foguete se faz pela liberação da água pressurizada presente no interior da garrafa PET. O aumento da pressão interna da garrafa-foguete se dá através do bombeamento de ar para seu interior, por meio de uma bomba de encher bicicleta com manômetro. O foguete é fixado em uma base de montagem constituída de canos de PVC.” (BEXIGA, BRUSCATO e GOMES, 2014).

Figura 1: Imagem dos foguetes construídos pelos alunos.

Fonte: Autora

Para a atividade na sede do colégio, cada grupo levou seu respectivo foguete. O lançamento ocorreu sobre uma base feita de PVC. O primeiro lançamento foi apenas com ar e pressão, pois desta forma, a filmagem sairia com toda a sua trajetória: ponto de partida, altura máxima e ponto de chegada. Os alunos foram instruídos a filmar de um ponto específico para que dentro da filmagem estivesse o banco de dois metros de comprimento que depois serviria de escala. Segue imagem de um lançamento:

Figura 2: Filmagem dos alunos.

Fonte: Autora.

O USO DO *TRACKER*

Na terceira aula, os grupos utilizaram o *software Tracker* com a finalidade de usar a filmagem da trajetória do foguete para desenvolver o roteiro que foi entregue aos alunos. Segue interface do programa:

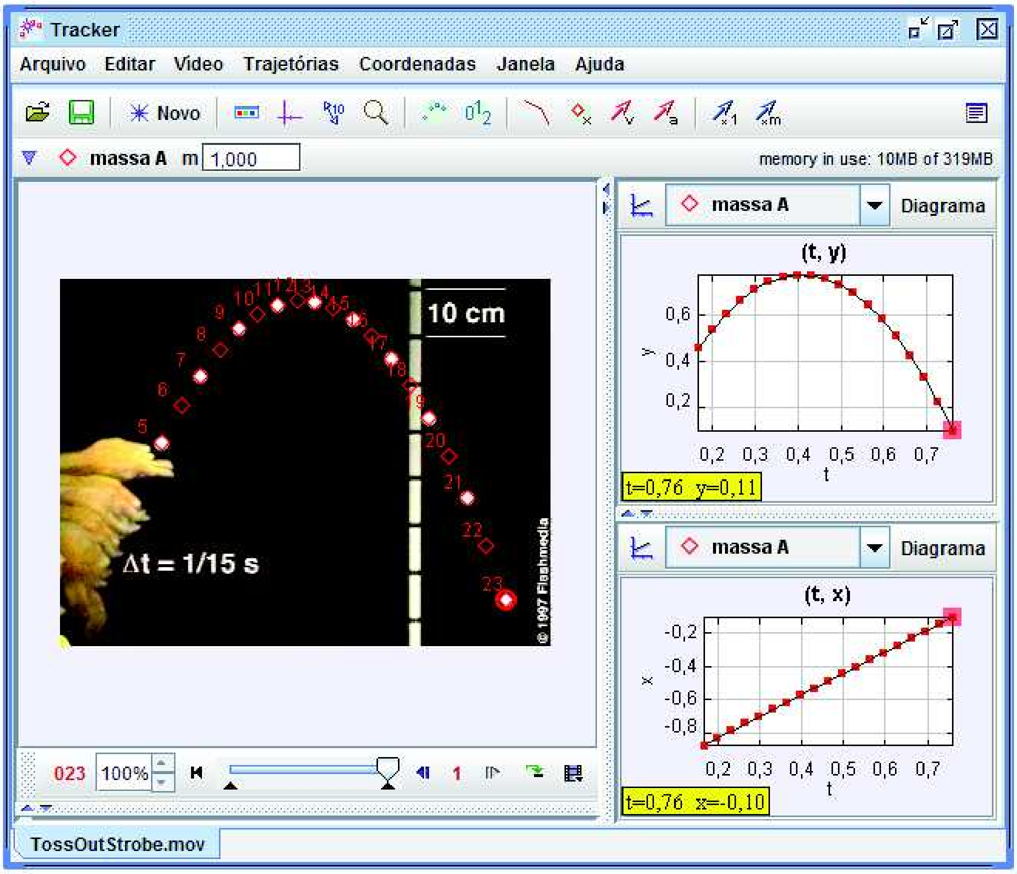


Figura3 - Interface *software Tracker*.

Fonte: http://www.if.ufrgs.br/cref/uab/lab/tracker.html

Antes de iniciar a última etapa, os alunos foram instruídos a localizar seus vídeos e abri-los no *Tracker*, localizar os eixos na interface do *software* e trocar algumas unidades de medidas. Os eixos x e y foram colocados no início do lançamento do foguete. O intervalo de tempo de cada ponto do foguete foi estabelecido pelo professor de Física para 1/8 de segundo, ou seja, 0,125s para cálculo e conclusões físicas.

O objetivo do uso do *software* foi fazer uma ligação mais significativa entre os dois movimentos físicos e a Matemática, bem como aproximar uma situação real daquela ensinada nas escolas, que, muitas vezes, baseiam-se em movimentos e equações de situações ideais.

APLICANDO CONCEITOS FÍSICOS E MATEMÁTICOS NO ESTUDO DE UM LANÇAMENTO OBLÍQUO

Após a primeira e a segunda etapas citadas anteriormente, os alunos de uma turma, dentre seis turmas, escolhidos aleatoriamente, foram ao Laboratório de Física do colégio para utilizar o *softwareTracker* e analisar seus vídeos seguindo o roteiro elaborado pelos professores.A respeito do roteiro, foram desenvolvidas três atividades utilizando o *Tracker*. As atividades estão descritas a seguir.

A *Atividade 1*, descrita no roteiro, determinava o alcance e a altura máxima atingidos pelo foguete. Por meio do vídeo,os alunos direcionaram a origem (0,0) dos eixos ortogonais sobre o instante zero do lançamento,determinando, assim, instantes de lançamentos e chegada ao solo e,em seguida, calcularam o tempo de voo. Ainda dentro desta atividade, os estudantes mediram o banco do vídeo em *pixels* – uma unidade desconhecida pelos alunos - relacionando os dois metros do banco nessa medida, servindo como escala.Ainda nessa mesma atividade, calcularam o alcance no eixo x em *pixels* e metros, e a altura no eixo y também em pixels e metros com as devidas conversões de escalas. Por fim, calcularam as velocidades médias no eixo x e no eixo y.

A *Atividade 2* determinava as posições do foguete em diferentes instantes. Os alunos completaram a *tabela 1* que segue abaixo:

Tabela 1

t_0 = ... s

Medida	t (s)	Δt (s)	x (*pixels*)	y (*pixels*)	x (m)	y (m)
1						
2						
3						
4						

5						
6						
7						
8						

Além das conversões de *pixels* para metros, a importância desta atividade concentrou-se no momento de calcular o Δt, pois a variação tinha que ser sempre em relação à anterior e não ao tempo inicial. Outro ponto importante foi a anotação das coordenadas, conforme orientações, sendo quatro pontos de subida e quatro pontos de descida do foguete. Essas informações foram passadas aos alunos enquanto desenvolviam as atividades.

A *Atividade 3* estimava as velocidades e acelerações do foguete. Completando a *tabela 2*:

Tabela 2

Intervalo entre as medidas	Δx (m)	Δy (m)	Δt (s)	v_{mx} (m/s)	v_{my} (m/s)	a_{mx} (m/s²)	a_{my} (m/s²)
1 e 2							
2 e 3							
3 e 4							
4 e 5							
5 e 6							
6 e 7							
7 e 8							
1 e 8							

Como podemos observar, os alunos calcularam variações de posição em relação ao eixo x e ao eixo y. Também calcularam velocidades e acelerações em relação ao eixo x e ao eixo y.

E, por fim, responderam aos seguintes problemas:

1. Como a velocidade v_{mx} se comporta em relação ao tempo? Ela varia? Ela não varia? Quais aspectos físicos fundamentam os resultados de sua observação, avaliação e conclusão?

2. Como se comporta a velocidade v_{my} quando comparamos seu comportamento com a velocidade v_{mx}? Quais aspectos físicos fundamentam os resultados de sua observação, avaliação e conclusão?

3. Ao longo do movimento do foguete, conseguimos registrar a presença de acelerações nas direções dos eixos x e y? Quais aspectos físicos fundamentam os resultados de sua observação, avaliação e conclusão?

4. Que tipo de equação matemática pode melhor representar a mudança de posição no eixo x?Sugira uma equação horária para o movimento desse eixo.

5. Que tipo de equação matemática pode melhor representar a mudança de posição no eixo y?Sugira uma equação horária para o movimento desse eixo.

6. Construa os respectivos gráficos das questões 4 e 5.

RESULTADOS OBTIDOS

Durante os três encontros, desenvolvidos em aproximadamente um mês, realizamos as atividades de ensino acima descritas. Na experimentação, dentro do Laboratório de Física, coletamos e organizamos dados para o trabalho, composto por registros de perguntas, dúvidas, esquemas e erros ocorridos durante o acompanhamento das ações dos alunos na composição do roteiro.

Na primeira atividade, os alunos não obtiveram dificuldades, escolhendo exatamente o que estava sendo pedido. Iniciaram o vídeo, pausaram e anotaram os instantes de lançamento e de chegada ao solo. Segue exemplo:

Uma vez aberto o vídeo, coloque a origem (0,0) dos eixos ortogonais (x e y) sobre o foguete no instante "zero" do lançamento. Para fazer isso, inicie o vídeo e interrompa-o no exato instante do lançamento. Anote precisamente esse instante no quadro abaixo. Anote também o exato instante em que o projétil atinge chão, ao final do movimento.

Instante do Lançamento:

t_0 = ...18.094...... s

Instante de chegada ao solo:

t = ...20.093...... s

Agora determine o tempo de voo do foguete:

Tempo de voo do foguete:

Δt = ...1.999............ s

Observe atentamente que ao movimentar o mouse a posição do cursor, x e y, aparece na tela. Essas coordenadas são lidas em *pixels*, os quais são contados a partir da origem do sistema de referência que você posicionou sobre o foguete. Utilizando o cursor do mouse encontre qual o tamanho (L), em *pixels* do intervalo externo entre as duas folhas brancas posicionadas sobre o banco que aparece no vídeo.

Comprimento do banco:

L = ...245.4...................... *pixels*

Figura 4 – Primeira atividade grupo 1.

Fonte: Alunos

Sabendo que o banco possui 2,00m de comprimento, e que essa medida corresponde ao número de pixels desse comprimento, determine o *alcance* (Δx) e a *altura máxima* (h) atingidas pelo foguete. (em *pixels* e em *metros*)

Alcance:

Δx = ...1.307..... *pixels* = ...10.65............ m

Altura:

h = ...464....... *pixels* = ...3.48........... m

De posse do tempo de voo, determine a velocidade média do foguete na direção vertical e horizontal.

$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ = ..5,32..... $\frac{m}{s}$

$v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ = .1,82..... $\frac{m}{s}$

Figura 5 – Primeira atividade grupo 1.

Fonte: Alunos.

Como o banco possui 2m de comprimento, foi solicitado aos alunos que calculassem Δx, ou seja, a variação em relação ao eixo x do ponto de partida até o ponto de chegada, tanto em *pixels* quanto em metros. Desta forma, o grupo 1 encontrou 1,307 *pixels* e, consequentemente, 10,65m de alcance no eixo x, através de cálculos manuais utilizando proporção. O mesmo ocorreu em relação à altura ou Δy, sendo 4,64 pixels e 3,78m. Logo após, calcularam as velocidades médias no eixo x e no eixo y, conforme a fórmula física $Vm = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Durante a realização da segunda atividade, alguns alunos encontraram algumas dificuldades ao completar a tabela, pois não sabiam se a variação do tempo era em relação ao tempo inicial ou ao tempo anterior. Seguem dois exemplos de grupos diferentes:

Tabela 1

t_0 = 18,294 s

Medida	t (s)	Δt (s)	x (*pixels*)	y (*pixels*)	x (m)	y (m)
1	18,394	0,1	206,5	284,2	1,68	2,31
2	18,494	0,1	298,0	331,2	2,43	2,69
3	18,594	0,1	386,5	386,5	3,14	3,14
4	18,694	0,1	462,1	423,2	3,76	3,44
5	19,194	0,5	793,4	456,0	6,46	3,71
6	19,294	0,1	848,6	431,4	6,91	3,51
7	19,394	0,1	909,9	402,8	7,41	3,28
8	19,494	0,1	969,2	361,9	7,89	2,94

Figura 6: Grupo 1 – Atividade 2

Fonte: Alunos

Ao completar a tabela 1, o grupo 1 utilizou o tempo inicial de 18,294s logo no momento de saída do foguete, ou seja, quando dada a primeira pausa de aproximadamente 0,1s do vídeo. Logo após, calcularam a variação do tempo conforme tempos anotados durante pausas do vídeo, sendo que este tempo deveria ter aproximadamente 0,1s. Os primeiros quatro pontos coordenados (x, y) em *pixels* foram anotados no movimento de subida do foguete, e os quatros últimos no movimento de descida. E, por último, calcularam em metros novamente por proporção.

Tabela 1

t_0 = 2,2 s

	Medida	t (s)	Δt (s)	x (*pixels*)	y (*pixels*)	x (m)	y (m)
SUB.	1	2,3	0,1	61,34	62,19	1,5	1,5
	2	2,5	0,3	143,1	128,6	3,4	3
	3	2,6	0,4	180,6	149,9	4,3	3,6
	4	2,8	0,6	249,6	222,7	5,9	5,3
DES.	5	3,2	1	414,9	202,3	10	4,8
	6	3,3	1,1	447,3	194,6	10,6	4,6
	7	3,5	1,3	517,1	189,1	12,3	4,5
	8	3,7	1,5	578,5	173,8	13,7	4,1

Figura 7: Grupo 2 – Atividade 2.

Fonte: Alunos.

Percebemos que o primeiro grupo obteve uma variação de tempo mais adequada, ou seja, perto de 0,1s, enquanto o segundo grupo obteve maiores variações, chegando até 1,5s,sendo que cada pausa do vídeo variava em 0,125s. Esse erro talvez interfira nas conclusões finais e modelagem das equações. Em relação à escala e à conversão de *pixels* para metros não houve dificuldades.

Na terceira atividade, houve muitas variações devido aos conceitos físicos e seus respectivos cálculos, o que interfere diretamente nas funções matemáticas envolvidas. Como a especialidade deste artigo é em Matemática, mostramos dois exemplos apenas para conclusões superficiais.

Tabela 2

Intervalo entre as medidas	Δx (m)	Δy (m)	Δt (s)	v_{mx} (m/s)	v_{my} (m/s)	a_{mx} (m/s²)	a_{my} (m/s²)
1 e 2	0,75	0,38	0,1	7,5	3,8	- 2	3,5
2 e 3	0,71	0,46	0,1	7,1	4,5		
3 e 4	0,62	0,3	0,1	6,2	3	1.1	-4 ,65
4 e 5	2,7	0,27	0,4	6,75	0,675		
5 e 6	0,45	-0,2	0,1	4,5	-2	2.5	-1,5
6 e 7	0,5	-0,23	0,1	5	-2,3		
7 e 8	0,48	-0,34	0,1	4,8	-6,6		
1 e 8	6,21	0,63	0,1	62,1	6,3		

Figura 8: Grupo 1 – Atividade 3.

Fonte: Alunos.

Tabela 2

Intervalo entre as medidas	Δx (m)	Δy (m)	Δt (s)	v_{mx} (m/s)	v_{my} (m/s)	a_{mx} (m/s²)	a_{my} (m/s²)
1 e 2	1,12	0,57	0,1	11,2	5,7	-4,5	-6,5
2 e 3	1,03	0,44	0,1	10,3	4,4		
3 e 4	1,00	0,39	0,1	10,0	3,9	- 3,0	- 9,0
4 e 5	0,94	0,21	0,1	9,4	2,1		
5 e 6	0,98	0,15	0,1	9,8	1,5	- 5,0	- 2,5
6 e 7	0,88	0,10	0,1	8,8	1,0		
7 e 8	0,92	-0,02	0,1	9,2	-0,2		
1 e 8	6,87	- 1,84	0,7	9,8	-2,6		

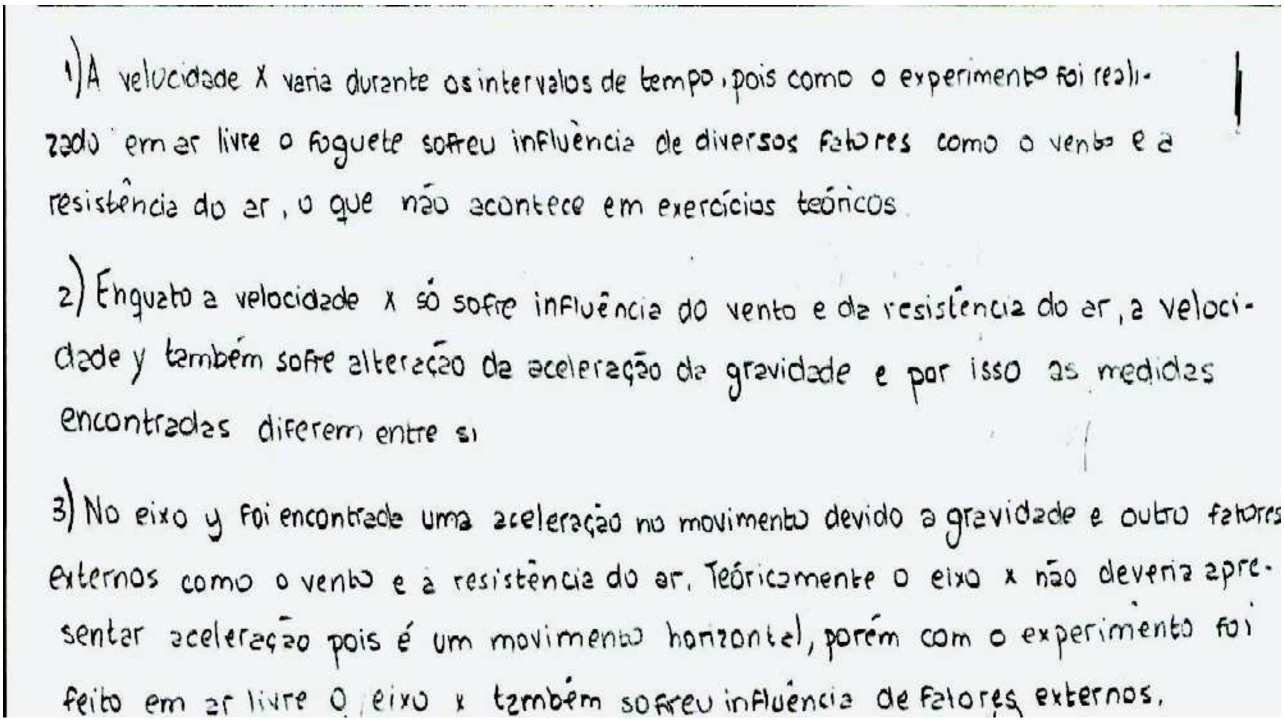
Figura 9: Grupo 3 – Atividade 3.

Fonte: Alunos.

O cálculo da aceleração de cada grupo ocorreu pela fórmula física $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, com intervalos de tempo descritos na tabela. Cada grupo chegou a valores muitos diferentes uns dos outros, devido a realidade de cada vídeo. Nas questões físicas, como velocidades e acelerações, percebemos que o primeiro grupo obteve velocidades variadas em relação ao eixo x e obteve acelerações negativas. As acelerações negativas foram obtidas devido a dois fatores: o primeiro, erros de cálculos, e o segundo, pelos valores das coordenadas dos pontos escolhidos serem da descida do foguete. A velocidade deveria ser constante ou aproximadamente o mesmo número e, portanto, não haver aceleração. No terceiro grupo, percebemos que a velocidade se manteve aproximadamente perto de 10m/s e também obteve aceleração.

Em relação ao eixo y, como o foguete subiu e desceu, os alunos encontraram velocidades e acelerações variadas, inclusive acelerações negativas. Essas acelerações negativas deveram-se ao fato de os alunos anotarem mais pontos de descida do foguete do que de subida.

Com relação às conclusões que foram citadas anteriormente, sendo três de Física e três de Matemática, daremos maior importância àquelas que envolvem conceitos matemáticos. Destacaremos, assim, algumas respostas físicas, a seguir, envolvendo as três primeiras perguntas.



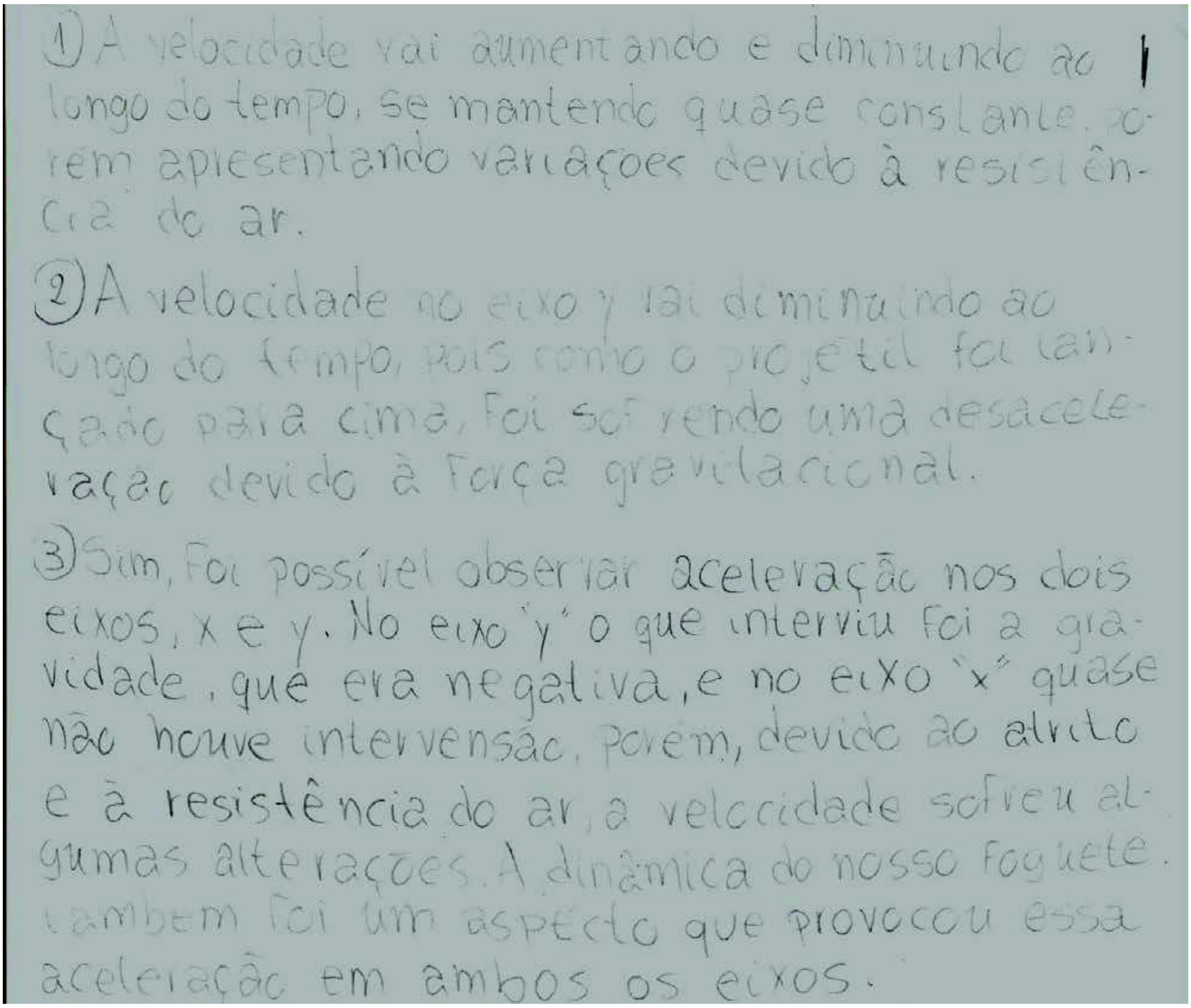
1) A velocidade X varia durante os intervalos de tempo, pois como o experimento foi realizado em ar livre o foguete sofreu influência de diversos fatores como o vento e a resistência do ar, o que não acontece em exercícios teóricos.

2) Enquato a velocidade X só sofre influência do vento e da resistência do ar, a velocidade y também sofre alteração da aceleração da gravidade e por isso as medidas encontradas diferem entre si

3) No eixo y foi encontrado uma aceleração no movimento devido a gravidade e outro fatores externos como o vento e à resistência do ar. Teóricamente o eixo x não deveria apresentar aceleração pois é um movimento horizontal, porém com o experimento foi feito em ar livre o eixo x também sofreu influência de fatores externos.

Figura 10: Grupo 1 – Conclusões – 3 primeiras perguntas.

Fonte: Alunos.



1) A velocidade vai aumentando e diminuindo ao longo do tempo, se mantendo quase constante, porém apresentando variaçoes devido à resistência do ar.

2) A velocidade no eixo y vai diminuindo ao longo do tempo, pois como o projetil foi lançado para cima, foi sofrendo uma desaceleração devido à força gravitacional.

3) Sim, foi possível observar aceleração nos dois eixos, x e y. No eixo "y" o que interviu foi a gravidade, que era negativa, e no eixo "x" quase não houve intervensão, porém, devido ao atrito e à resistência do ar, a velocidade sofreu algumas alteraçoes. A dinâmica do nosso foguete também foi um aspecto que provocou essa aceleração em ambos os eixos.

Figura 11: Grupo 3 - Conclusões – 3 primeiras perguntas.

Fonte: Alunos.

Nestas conclusões, a principal ideia foi a de que o foguete sofreu influências do meio, tais como resistência do ar, vento, ou modificações de trajetória conforme a aerodinâmica de cada foguete. Os alunos, na sua maioria, compreenderam que existiu um movimento em relação ao eixo x e outro movimento em relação ao eixo y,e, principalmente, que a realidade é diferente dos exercícios teóricos.

As questões que envolvem a Matemática e, consequentemente, a Física serão descritas a seguir.

A questão quatro solicitou a melhor equação para representar o movimento em relação ao eixo x. Como os alunosjá haviam percebido que na teoria a velocidade era constante e não haveria aceleração, deduziram, através de pontos, juntamente com a fórmula da física, que se tratava de uma função afim.

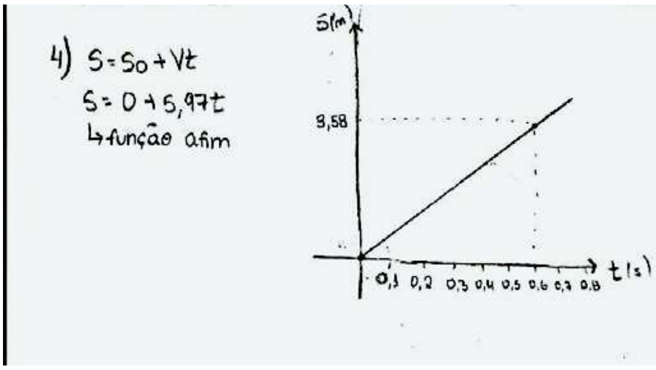


Figura 12: Grupo 1 – Questão 4 e 6.

Fonte: Alunos.

Este grupo, quando formulou a função,misturou conceitos da Física com a realidade do foguete, pois sua posição inicial no trabalho em si é diferente de zero. Como havia percebido que a variação do foguete era linear, usou apenas um ponto para construir o gráfico relacionando-o a conceitos matemáticos.

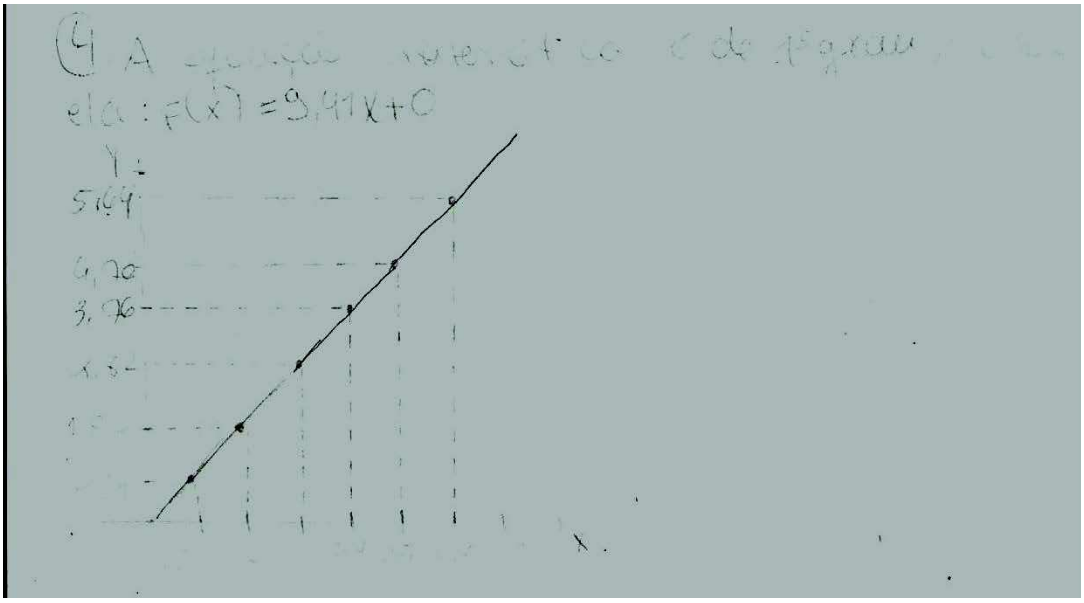


Figura 13: Grupo 3 – Questão 4 e 6.

Fonte: Alunos.

O outro grupo também considerou a posção inicial zero, porém utilizou os pontos da trajetória para desenhar o gráfico.

A questão cinco, pedia a equação que melhor representasse o movimento em relação ao eixo y, como pelas questões fisicas o foguete iniciou com uma aceleração até a primeira pausa do vídeo, ou seja, até 0,1 segundo.Os alunos perceberam que usariam uma equação diferente da anterior e quanto ao gráfico apareceram dois tipos: um pedaço de curva e uma parábola. Nesta última pergunta surgiram também alguns equívocos.

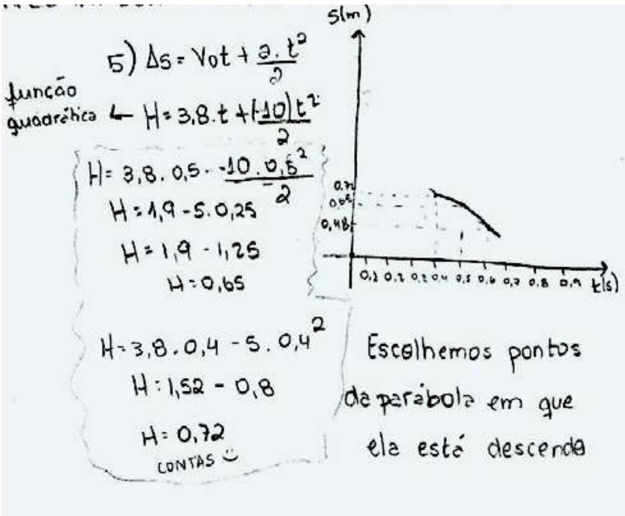


Figura 14: Grupo 1 – Questão 5 e 6.

Fonte: Alunos.

Percebemos que os alunos aproximaram novamente a Física com a Matemática, e, por meio dos dados construídos anteriormente e das observações quanto ao movimento, relacionaram o movimento em relação ao eixo y e a função quadrática. Por meio dos dados da função que calcularam os pontos para desenhar a curva.

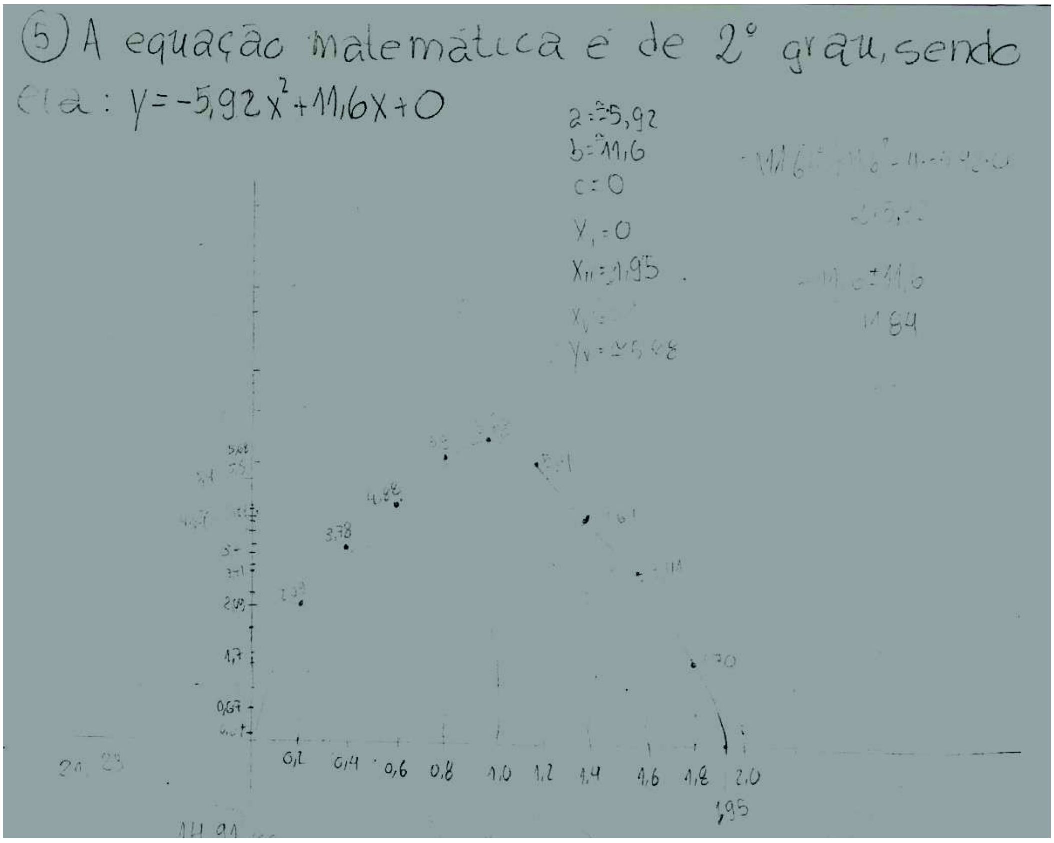


Figura 15: Grupo 3 – Questão 5 e 6.

Fonte: Alunos.

Neste gráfico, conseguimos quase visualizar uma parábola, construída e delineada ponto a ponto, segundo os dados fornecidos pelas tabelas 1 e 2.

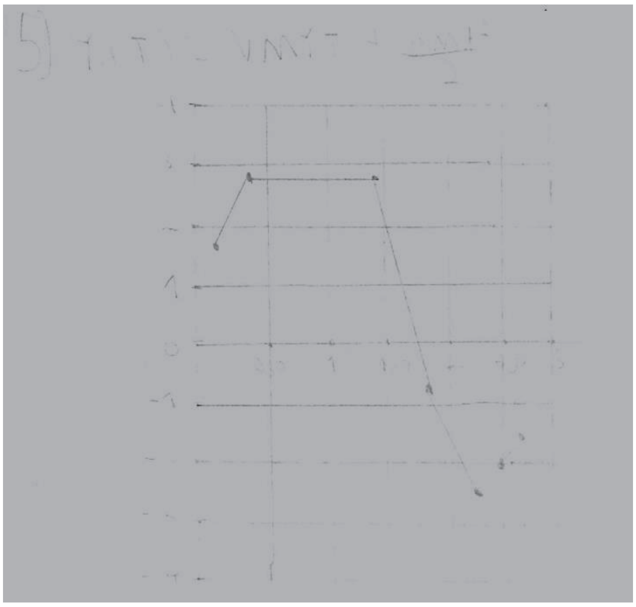


Figura 16: Grupo 4 – Questão 5 e 6.

Fonte: Alunos.

Este último gráfico está equivocado em relação à Matemática: alguns dados foram anotados de maneira diferente dos demais, o que resultou em um gráfico sem sentido, assim como a falta de uma função coerente.

A maior dificuldade dos grupos foi equacionar as funções. Alguns perguntaram como fariam isso, outros tentaram manipular os pontos e houve ainda alguns grupos que não conseguiram relacionar funções físicas e matemáticas como uma só.

As atividades possibilitaram uma reflexão a respeito das realidades física e matemática diferentes dos modelos teóricos de dentro da sala de aula. Os alunos exploraram, em algumas aulas, a forma como são modeladas e direcionadas as funções matemáticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final deste trabalho, consideramos que os objetivos da nossa proposta de ensino foram atingidos pela maioria da turma. Obtivemos resultados positivos com relação ao interesse dos alunos que, em quase todos os momentos, fizeram perguntas, levantaram conjecturas e demonstraram interesse pelas atividades propostas.

Este estudo evidenciou que o processo de modelagem no lançamento do foguete relacionou as disciplinas de Física e Matemática, permitindo que os alunos identificassem as diferentes representações em relação aos eixos do plano cartesiano e à construção de modelos matemáticos, no caso, as funções afins e quadráticas. O conjunto da modelagem, ou seja,o uso da tecnologia e da prática deram significado ao conceito de função no contexto em que a atividade foi realizada, mostrando, também, a viabilidade da modelagem matemática e sua contribuição como prática alternativa de ensino para a construção e a exploração de alguns conceitos de função. Mostrou,ainda, que a partir da vivência de experiências, os significados dos conteúdos físicos e matemáticos foram sendo, gradativamente, construídos pelos alunos.

Em relação à modelagem matemática, Bassanezi (2002) afirma que a modelagem no ensino é apenas uma estratégia, ou seja, podem acontecer dificuldades ao longo da atividade, sendo que o importante não é chegar ao modelo bem-sucedido, mas sim estimular os alunos a questionar, a caminhar e a compreender os conteúdos matemáticos. Isso ficou evidente durante a realização do roteiro, pois embora as funções e suas construções não tenham sido perfeitas, as conjecturas das disciplinas e seus respectivos assuntos foram encaminhados para uma melhor compreensão dos alunos. Destaca-se também a importância da mediação dos professores para impulsionar e direcionar o trabalho, principalmente nas formulações das funções e nas construções dos gráficos.

O principal aprendizado que os educandos obtiveram foi que a realidade é diferente da teoria e dos problemas apresentados em sala de aula, e esse era o objetivo. Os discentes fizeram muitas perguntas, relacionando seus conhecimentos prévios com os novos que foram surgindo. Porém, uma sugestão para as próximas práticas seria a realização de debates para evidenciar o pensamento crítico e compreender melhor alguns pontos notáveis da função quadrática relacionados ao movimento oblíquo.

Finalizando este trabalho, refletimos sobre o conhecimento e a experiência que adquirimos durante a pesquisa, os quais proporcionaram ao pesquisador saberes nos mais diversos sentidos.

Em nível pessoal, o desenvolvimento do trabalho em todas as etapas e a troca de conhecimentos com os alunos, incluindo o melhor entendimento dos movimentos físicos, contribuíram para o meu crescimento na elaboração de atividades de modelagem e no ensino de funções.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem matemática e os futuros professores**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25, 2002, Caxambu. *Anai*s... Caxambu: ANPED, 2002. 1 CD-ROM.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem matemática e os professores: a questão da formação.***Bolema*, Rio Claro, n.15, p. 5-23, 2001.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto. 3ª edição. São Paulo. 2006.

BEXIGA, Victor Sardinha. BRUSCATO, César Gentil. GOMES, Luiz Carlos. **Ensinando Física com foguetes de água e utilizando TIC através de uma proposta multidisciplinar**. Porto Alegre. 2014.

KLÜBER, Tiago Emanuel. BURAK, Dionísio. **Concepções de Modelagem Matemática: contribuições teóricas**. Educ. Mat. Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 1, pp. 17-34, 2008.

KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio.**Sobre a pesquisa em Modelagem na Educação Matemática brasileira.**Revista Diálogo Educacional, Paraná,vol. 14, núm. 41, enero-abril, pp. 143-163, 2014.

KLÜBER, Tiago Emanuel. BURAK, Dionísio. **Sobre os objetivos e problemas da pesquisa brasileira em Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Práxis Educativa, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 467-488, jul./dez. 2012.
Disponível em: http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa

ANEXO

Roteiro
Os conceitos físicos e matemáticos no estudo de um lançamento oblíquo.

O objetivo desta atividade é analisar as informações sobre a trajetória dos foguetes de água colhidas em lançamentos anteriores. Para essa análise estaremos utilizando um software através do qual encontraremos o *alcance* (Δx) e a *altura máxima* (h) atingida pelos mesmos. Através de uma adequada manipulação do programa conseguiremos determinar também a *velocidade de lançamento* (com suas componentes vertical e horizontal), bem como discutir outras questões físicas e matemáticas envolvidas naquela atividade.

Equipamento a ser utilizado

- Microcomputador
- Software TRACKER

Procedimentos

Atividade 1: Determinação do alcance e da altura máxima atingidos pelo foguete

Abra um dos vídeos dos lançamentos efetuados (não precisa ser necessariamente o lançamento efetuado pelo seu grupo) através do software TRACKER. Para isso, basta clicar sobre um dos vídeos com o botão direito do mouse e selecionar na caixa de opções esse software para abrir o vídeo.

Uma vez aberto o vídeo, coloque a origem (0,0) dos eixos ortogonais (x e y) sobre o foguete no instante “zero” do lançamento. Para fazer isso, inicie o vídeo e interrompa-o no exato instante do lançamento. Anote precisamente esse instante no quadro abaixo. Anote também o exato instante em que o projétil atinge chão, ao final do movimento.

Instante do Lançamento:	Instante de chegada ao solo:
t_0 = ... s	t = ... s

Agora determine o tempo de voo do foguete:

Tempo de voo do foguete:
Δt = ... s

Observe atentamente que ao movimentar o mouse a posição do cursor, x e y, aparece na tela. Essas coordenadas são lidas em *pixels*, os quais são contados a partir da origem do sistema de referência que você posicionou sobre o foguete. Utilizando o cursor do mouse encontre qual o tamanho (L) do intervalo das duas folhas brancas posicionadas sobre o banco (em *pixels*). Esse banco está localizado em uma posição central do vídeo na borda inferior.

Comprimento do banco:
L = ... *pixels*

Sabendo que o banco possui 2,00m de comprimento, e que essa medida corresponde ao número de pixels desse comprimento, determine o *alcance* (Δx) e a *altura máxima* (h) atingidas pelo foguete. (em *pixels* e em *metros*)

Alcance:	Altura:
Δx = ... *pixels* = ... m	h = ... *pixels* = ... m

De posse do tempo de voo, determine a velocidade média do foguete na direção vertical e horizontal.

$$v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m}{s} \qquad v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m}{s}$$

Atividade 2: Determinação das posições do foguete em diferentes instantes

Preencha a tabela a seguir encontrando a posição do foguete em função do tempo. Utilize para isso o programa TRACKER. Selecione pelo menos quatro instantes durante a subida do foguete e quatro instantes durante a descida. (*Sugestão: procure utilizar intervalos de tempos iguais entre as medidas. Para isso você pode controlar as posições do foguete em cada instante a partir de uma rolagem quadro a quadro, frame a frame. Atente que o intervalo de tempo entre dois frames sucessivos mede 0,125 segundos. Você pode utilizar, por exemplo, intervalos de três frames para cada tomada de posição).*

Tabela 1

t_0 = ... s

Medida	t (s)	Δt (s)	x (*pixels*)	y (*pixels*)	x (m)	y (m)
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						

Atividade 3: Estimativa das velocidades e acelerações do foguete

Agora vamos determinar as *velocidades médias* (v_m) e as *acelerações médias* (a_m). Para isso vamos analisar o movimento em duas direções. Consideraremos um movimento ao longo do eixo “x” e outro ao longo do eixo “y”. Denominaremos v_{mx} e v_{my} às velocidades médias ao longo de cada um desses eixos, respectivamente, considerando os intervalos obtidos na tabela 1

Tabela 2

Intervalo entre as medidas	Δx (m)	Δy (m)	Δt (s)	v_{mx} (m/s)	v_{my} (m/s)	a_{mx} (m/s²)	a_{my} (m/s²)
1 e 2							
2 e 3							
3 e 4							
4 e 5							
5 e 6							
6 e 7							
7 e 8							
1 e 8							

Conclusões

1. Como a velocidade v_{mx} se comporta em relação ao tempo? Ela varia? Ela não varia? Quais aspectos físicos fundamentam os resultados de sua observação, avaliação e conclusões?

2. Como se comporta a velocidade v_{my}, quando comparamos seu comportamento com a velocidade v_{mx}? Quais aspectos físicos fundamentam os resultados de sua observação, avaliação e conclusões?

3. Ao longo do movimento do foguete conseguimos registrar a presença de acelerações nas direções dos eixos “x” e “y”? Quais aspectos físicos fundamentam os resultados de sua observação, avaliação e conclusões?

4. Que tipo de equação matemática pode melhor representar a mudança de posição no eixo X? Sugira uma equação horária para o movimento no eixo X.

5. Que tipo de equação matemática pode melhor representar a mudança de posição no eixo Y? Sugira uma equação horária para o movimento no eixo Y.
6. Construa os respectivos gráficos das questões 4 e 5.