

**UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS - UNISINOS**  
**UNIDADE ACADÊMICA DE GRADUAÇÃO**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**CRÍSTIAN ADRIANO GARCIA DE OLIVEIRA**

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA**  
**O uso da Astronomia no estudo das Funções Periódicas**

**São Leopoldo**  
**2019**

CRÍSTIAN ADRIANO GARCIA DE OLIVEIRA

**APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA**  
**O uso da Astronomia no estudo das Funções Periódicas**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado como requisito parcial para  
obtenção do título de Licenciado em  
Matemática, pelo Curso de Matemática da  
Universidade do Vale do Rio dos Sinos -  
UNISINOS

Orientador: Prof. Dr. Alessandro Marian Carvalho

São Leopoldo

2019

Dedico este trabalho à minha família e amigos que sempre me apoiaram nessa trajetória. Em especial aos meus pais Sandra e Mario e minha namorada Bianca pelos conselhos e pela confiança em mim depositados e também à minha amiga Paula Etiele com quem dividi muitas horas de estudo e de confidências nessa longa trajetória.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Ao professor Dr. Alexsandro Marian Carvalho por aceitar o convite de me orientar mesmo com o trabalho já em andamento, pela cordialidade, pelos ensinamentos e por suas contribuições.

Às professoras avaliadoras, Dra. Cândida Cristina Klein e M<sup>a</sup> Maria Helena Selbach Enriconi, pela disponibilidade e contribuições a este trabalho.

À professora Dra. Neiva Irma Jost Manzini por me orientar durante a elaboração do projeto deste trabalho e por suas contribuições.

Ao corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS por todos os ensinamentos durante o período da minha graduação.

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver um plano de ensino e aprendizagem fundamentado numa metodologia ativa. Usa-se a Astronomia como objeto de significação, em especial, a variação sazonal do diâmetro angular dos planetas do Sistema Solar quando observados a partir da superfície terrestre. Propõe-se uma atividade focada tanto na observação e medidas astronômicas virtuais como no tratamento dos dados coletados. Como produto desta abordagem de ensino-aprendizagem ativa, espera-se que os conceitos básicos de uma função periódica (amplitude, período/frequência e fase) emerjam como concepções concretas deste processo.

**Palavras chave:** Matemática. Astronomia. Aprendizagem Significativa

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de função periódica .....	15
Figura 2 – Função $fx = a + b\text{sen}(cx + d)$ .....	16
Figura 3 – Janela Inicial: Geogebra Classic 6 .....	17
Figura 4 - Planilha de Cálculos:Geogebra Classic 6 .....	18
Figura 5 – Copiando o Gráfico para a Janela de Visualização.....	18
Figura 6 – Ajuste da janela de Visualização: Geogebra.....	19
Figura 7 – Gráfico de Função na Janela de Visualização: Geogebra Classic 6 .....	20
Figura 8 – Adicionando Gráficos Diversos: Geogebra Classic 6 .....	20
Figura 9 – Planetas no Sistema Solar .....	22
Figura 10 – Configuração de Planetas Inferiores .....	23
Figura 11 – Configuração de Planetas Superiores.....	23
Figura 12 – Período Sinódico.....	24
Figura 13 – Período Sideral.....	25
Figura 14 – Diâmetro angular de um objeto .....	26
Figura 15 – Apresentação: Stellarium v.0.19.0.....	27
Figura 16 – Janela inicial – Stellarium v.0.19.0 .....	28
Figura 17 – Pesquisa rápida Vênus: Stellarium v.0.19.0.....	29
Figura 18 – Vênus, botões e atalhos: Stellarium v.0.19.0 .....	30
Figura 19 – Habilitando a medição angular: Stellarium v.0.19.0 .....	31
Figura 20 – Vênus: Stellarium v.0.19.0 .....	33
Figura 21 – Posição estimada de Vênus em 03/07/2015 .....	33
Figura 22 – Gráfico dos Valores da Tabela 1.....	36

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>7</b>
1.1 TEMA .....	7
1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA.....	7
1.3 PROBLEMA .....	8
1.4 OBJETIVOS .....	8
<b>1.4.1 Objetivo Geral</b> .....	<b>8</b>
<b>1.4.2 Objetivos Específicos</b> .....	<b>8</b>
1.5 JUSTIFICATIVA .....	8
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>11</b>
2.1 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....	11
<b>2.1.1 Desenvolvendo uma Aprendizagem Significativa</b> .....	<b>12</b>
2.2 ELEMENTOS MATEMÁTICOS .....	15
<b>2.2.1 Funções Periódicas</b> .....	<b>15</b>
<b>2.2.2 Projeção de gráficos no Geogebra Classic 6</b> .....	<b>16</b>
2.3 ELEMENTOS DE ASTRONOMIA .....	21
<b>2.3.1 Fundamentos de Astronomia</b> .....	<b>21</b>
2.3.1.1 Planetas Inferiores e Superiores .....	21
2.3.1.2 Configurações Planetárias .....	22
2.3.1.3 Período Sinódico e Sideral .....	24
2.3.1.4 Diâmetro Angular de um Objeto .....	25
<b>2.3.2 Stellarium</b> .....	<b>27</b>
<b>3. DIÂMETRO ANGULAR NO STELLARIUM</b> .....	<b>32</b>
<b>4 ATIVIDADES PROPOSTAS</b> .....	<b>37</b>
4.1 DADOS GERAIS .....	37
<b>4.1.1 Objetivo Geral do Plano de Aula</b> .....	<b>37</b>
<b>4.1.2 Objetivos Específicos do Plano de Aula</b> .....	<b>37</b>
<b>4.1.3 Materiais Necessários</b> .....	<b>38</b>
<b>4.1.4 Desenvolvimento do Plano de Aula</b> .....	<b>38</b>
<b>4.1.5 Avaliação</b> .....	<b>44</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>45</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>47</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, grandes pensadores e educadores têm estudado novos métodos de ensino para tentar solucionar os evidentes problemas que o método tradicional de ensino nos traz com o passar do tempo. A este método foram criadas alternativas das mais variadas, algumas delas prezando que o aluno seja o centro do processo de aprendizagem e em outras trazendo o professor para o centro. Este estudo visa identificar e explorar os benefícios de uma dessas vertentes, com base no conceito de aprendizagem significativa de Ausubel (1980) aliado às práticas dialéticas de ensino e aprendizagem.

Durante o ensino de Matemática os conhecimentos ainda são apresentados como obras prontas, algumas vezes sem nenhuma contextualização ou aplicação visando integração do aluno com o assunto. Para D'Ambrósio (1997) o maior desafio do professor é trazer para o aluno assuntos atuais e neles embasar a construção do conhecimento ao mesmo tempo em que cumpre as diretrizes do planejamento curricular. De fato, essa tarefa não é nada fácil, porém para auxiliar nesse desafio, desenvolveu-se um estudo sobre como o ensino de funções periódicas pode ser trabalhado baseado na observação astronômica e através da verificação da variação do diâmetro angular aparente de um astro durante um determinado tempo.

### 1.1 TEMA

O tema escolhido para esta pesquisa é o uso de material potencialmente significativo no ensino de funções periódicas para alunos de ensino médio na disciplina de Matemática, visando utilizar de elementos de Astronomia como base de fundamentação, através de uma abordagem dialética com fundamentação na aprendizagem significativa de Ausubel (1980).

### 1.2 DELIMITAÇÃO DO TEMA

Dentro desta proposta, iremos desenvolver um estudo sobre como produzir um material que pode ser utilizado como potencial significativo através da observação de corpos celestes em um software virtual e como a identificação de suas mudanças de tamanho aparente (diâmetro angular do objeto) pode ser utilizada



para potencializar o estudo das funções periódicas e suas principais definições – período, frequência, amplitude e fase.

### 1.3 PROBLEMA

Como elaborar um material potencialmente significativo que possa ser utilizado durante o ensino de funções periódicas no ensino médio apropriando-se do conceito de diâmetro angular de um astro?

### 1.4 OBJETIVOS

#### 1.4.1 Objetivo Geral

Desenvolver um estudo sobre como produzir um material potencialmente significativo que desenvolva os conceitos de função periódica – fase, amplitude e período – enquanto se estuda a variação aparente do diâmetro angular de um astro durante um tempo determinado.

#### 1.4.2 Objetivos Específicos

- a) identificar de qual maneira pode-se direcionar um estudo sobre funções periódicas e seus principais conceitos baseados em observações astronômicas;
- b) elaborar um conjunto de atividades que, através da utilização de um software gratuito de Astronomia, auxiliem na proposição de uma aprendizagem significativa usando uma metodologia ativa;
- c) identificar de que maneira conseguimos direcionar o aprendizado de um material significativo para uma aprendizagem significativa.

### 1.5 JUSTIFICATIVA

A falta de significado para certos conteúdos, onde há possibilidade e até a necessidade de fazê-lo, deixa o aluno, na grande maioria das vezes, sem qualquer mobilização, que é parte imprescindível no processo de construção um aprendizado significativo. Nesse processo de ensino-aprendizagem no qual, praticamente, não

houve evolução durante décadas, segundo Vasconcellos (2000) o professor acaba por vezes oprimindo seus alunos, consciente ou inconscientemente. Essa necessidade de que os alunos sigam os seus procedimentos e reproduzam exatamente aquilo que ele solicita com as definições já prontas, acaba coibindo os alunos de desenvolver a sua criatividade e também contribui para uma aprendizagem sem significado, puramente mecânica. Esse tipo de pedagogia

[...] configura o próprio quadro da reprodução da ideologia; reprodução do autoritarismo, da coação, da heteronomia, da subserviência, do silêncio, da morte da crítica, da criatividade, da curiosidade, da inventividade – de tudo aquilo que configura a atividade reflexiva, filosófica ou científica. (BECKER, 2015, p.16).

Essa metodologia de ensino de reprodução também contribui para a dificuldade que muitos alunos têm com a interpretação e resolução de exercícios que não são meramente de repetição. Segundo dados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) 2015<sup>1</sup>, além das dificuldades já conhecidas quando o assunto é Matemática - cerca de 70% dos alunos brasileiros não conseguem desenvolver cálculos simples e responder questões de forma clara e objetiva, 51% dos estudantes brasileiros tiveram resultado insuficiente no quesito interpretação de texto. Essas dificuldades podem estar relacionadas não só com o baixo índice de leitura do brasileiro em geral, mas também ser uma das conseqüências desse ensino de reprodução ao qual estão expostos, sem desenvolvimento de leitura crítica. O ensino de um conteúdo com base na problematização faz com que tanto o aluno quanto o professor deixem sua zona de conforto e essa mudança de comportamento traz para a sala de aula um ambiente mais investigativo e desafiador, elevando a importância de alguns conteúdos antes deixados de lado.

Através do planejamento de um material potencialmente significativo é possível dar subsídios para o entendimento de conceitos básicos de funções periódicas, ao mesmo tempo introduzir o uso das funções trigonométricas de maneira significativa e estudar um assunto cada vez mais distante das escolas que é a astronomia. A isso, somemos o fato de que grande parte dos fenômenos naturais observáveis pode ser descrita através de funções matemáticas. Isso, portanto, deve fazer parte do planejamento de aula do professor. Direcionar o conhecimento para

---

<sup>1</sup> Resultados disponíveis em: <https://educacao.uol.com.br/noticias/2016/12/06/maioria-dos-alunos-brasileiros-nao-sabe-fazer-conta-nem-entende-o-que-le.htm?cmpid=copiaecola>

conteúdos aplicáveis possui um bom potencial para ajudar na mobilização dos alunos em suas construções de conhecimento.

Entre as diversas ciências, a que provavelmente possui maior potencial de atração por parte dos alunos é a Astronomia. Muitos dos fenômenos astronômicos estão imersos no cotidiano dos estudantes, em especial, os associados aos movimentos dos astros. Entre eles, o diâmetro angular de um planeta é uma possibilidade para o ensino de funções periódicas. Fruto da composição dos movimentos das órbitas dos astros com a órbita da Terra, este fenômeno possui um caráter sazonal em termos do tamanho angular aparente observado.

Neste sentido, propõe-se uma atividade de ensino em que a introdução dos conceitos elementares de uma função periódica (amplitude, frequência/período e fase) seja baseada na problematização do diâmetro angular de um planeta vizinho. Fundamentada numa metodologia ativa de ensino-aprendizagem, sugere-se uma prática em que o aluno participe do processo com protagonismo, ou seja, faça as observações e medidas astronômicas como o devido tratamento dos dados. Espera-se que a superposição destas ações (observação, medida e análise) sirva como um fio condutor entre a problematização e a significação dos conhecimentos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Para a definição dos termos que serão utilizados a partir daqui é preciso salientar que Ausubel faz parte de uma linha de teóricos que acredita no processo de ensino-aprendizagem do ponto de vista cognitivista, isto é, baseia sua teoria sob a perspectiva de que há uma série de ideias sob organização na estrutura cognitiva do indivíduo e que o conhecimento só se constrói através da interação e mescla dessas ideias entre si e também com o novo conhecimento. Nessa linha de pensamento tem-se a preocupação principal voltada para a sala de aula, como o aluno aprende e como o professor deve considerar os conhecimentos prévios de cada aluno. Ausubel enfatiza em seus estudos que o elemento mais importante no processo de uma aprendizagem significativa é o que o aluno já conhece. Moreira (1985, p.6) considera que

[...] a linha cognitivista enfatiza o processo de cognição, através do qual o universo de significados do indivíduo tem origem: à medida em que o ser se situa no mundo, estabelece relações de significação, isto é, atribui significados à realidade em que se encontra. Preocupa-se com o processo de compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição, e procura identificar regularidades nesse processo. Ocupa-se particularmente dos processos mentais.

A definição de aprendizagem significativa descrita por Ausubel refere-se à aprendizagem como sendo “o mecanismo humano por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo do conhecimento.” (apud Moreira, 1997, s/pag). Para que a aprendizagem seja dita *significativa* é necessário que o novo conceito (objeto de aprendizagem) a ser compreendido esteja relacionado a algum outro ou uma série de conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Sob esse ponto de vista, Moreira (1997, s/pag.) cita que a “aprendizagem significativa é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitral a estrutura cognitiva do aprendiz”, isto é, um novo conhecimento é construído pelo aluno à medida que um conceito já conhecido em sua estrutura cognitiva serve de alicerce para a construção do significado deste novo conhecimento. Essa construção faz com que cada novo

conceito inserido dentro dessa estrutura, juntamente com os conceitos já existentes se transformem e se complementem, criando conceitos bem mais elaborados e preparados para servirem de base para os futuros novos conhecimentos.

Também definida por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a *aprendizagem mecânica* diz respeito à aprendizagem quando a relação desses conceitos, anteriormente citados, é feita de maneira arbitrária dentro da estrutura cognitiva do indivíduo. Não sendo diretamente oposta à *aprendizagem significativa*, a *aprendizagem mecânica* pode também ser definida como uma aprendizagem onde não houve associação do novo conceito com aqueles já aprendidos pelo aluno. Deve ser ressaltado que tanto a aprendizagem mecânica quanto a aprendizagem significativa podem ser ativas ou receptivas, pois o que difere uma da outra é como os novos conceitos aprendidos interagem com os conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aluno.

Fazendo uma análise entre o caso de aprendizagem mecânica receptiva e o que estamos acostumados a verificar nas escolas e academias, podemos dizer que este modelo de aprendizagem é, sem sombra de dúvidas, o que mais se verifica durante as aulas de Matemática. Um professor tradicional faz com que o aluno trabalhe incessantemente de maneira a “decorar” ou “fixar” conceitos e definições, desenvolvendo a repetição de tarefas de mesma estrutura, onde o aluno não precisa entender o que está exercitando, somente precisa reproduzir conforme o modelo. Para Becker (2002, p.144)

a aprendizagem entendida como transmissão de conhecimento, constitui a marca registrada do empirismo. Se a criança é entendida como sendo, ao nascer, tabula rasa em termos de conhecimento, a aprendizagem só poderá ser entendida como algo que vem de fora e adere na mente infantil.

Portanto, para que haja uma aprendizagem significativa, os conteúdos podem ser trabalhados de forma receptiva ou ativa, em que pese, devem estar estruturados de maneira ao aluno conseguir construir um desencadeamento de conceitos e interações em sua estrutura cognitiva.

### 2.1.1 Desenvolvendo uma Aprendizagem Significativa

Durante a proposição de uma aprendizagem significativa, um dos aspectos de extrema importância que deve ser levado em consideração é como se dá o processo

de construção do conhecimento como um todo. Conforme Vasconcellos (2000) o conhecimento se constrói em três grandes momentos: a síntese, a análise e a síntese. Nesses três momentos, temos distintas situações. Na síntese nos apropriamos das informações que julgamos necessárias conhecer. Após essa etapa, na análise é onde a avaliação do que é mais relevante ao objeto de conhecimento e o que pode ser descartado começa a ser esmiuçado e separado pelo aprendiz. A última etapa é a síntese, onde é feita a organização dos conceitos, estruturando o conhecimento com base no que já se conhecia e apropriando-se daquilo que foi construído.

Nesse contexto, é necessário que haja interação tanto do o aluno e seu objeto de conhecimento quanto do professor para com ambos, descentralizando o processo de aprendizagem que por muitas vezes está diretamente ligado apenas àquelas definições que o professor transmite aos alunos. Para Becker (2002, p.9)

Uma pedagogia centrada no professor tende a valorizar relações hierárquicas que, em nome da transmissão do conhecimento, acabam por produzir ditadores, por um lado, e indivíduos subservientes, anulados em sua capacidade criativa, por outro.

O professor obrigatoriamente tem que estar preparado para trabalhar com seus alunos de maneira a romper com o método tradicional e lançar-se de maneira irrevogável ao universo dialético perante os alunos, demonstrando a eles que o conhecimento só será construído de maneira efetiva quando houver por parte deles a autonomia necessária para o complemento desse processo.

O professor construirá, a cada dia, a sua docência, dinamizando seu processo de aprender. Os alunos construirão, a cada dia, a sua 'discência', ensinando, aos colegas e ao professor, novos saberes, noções, conceitos, objetos culturais, teorias, comportamentos. Farão perguntas, muitas delas banais, mas outras que desafiarão o professor. Mas o que avança mesmo nesse processo é a condição prévia de todo aprender ou de todo conhecimento, isto é, a capacidade construída de, por um lado, apropriar-se criticamente da realidade física ou social e, por outro lado, de construir sempre mais e novos conhecimentos ou capacidades. (BECKER, 2015, p.25).

Para conteúdos que ainda são apresentados em forma de conceitos prontos e com fim em si próprios, o aluno tem um papel extremamente passivo, observando e recebendo acriticamente. Para superar esse processo, haverá então a necessidade do professor, além de ser mediador no processo de aprendizagem, se tornar um

facilitador, pois não deverá mais trabalhar de maneira puramente expositiva, mas sim possibilitar que os alunos tenham condições de desenvolver os conhecimentos de maneira crítica e significativa por suas próprias conexões.

Para tanto o professor precisa também estar ciente de quais os conceitos prévios que o aluno precisará ter compreendido para lhe dar a possibilidade de desenvolver esse novo conhecimento de maneira autônoma e não arbitral, além de desenvolver um material didático que seja potencialmente significativo para isso. Precisa também atentar-se para o excesso de informações desnecessárias que pode, na medida em que o conceito ainda não está formado, dificultar a organização cognitiva do aluno e exercer função contrária àquela que ele está propondo. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC propõe que

o professor deve selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário,” para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc. (BNCC, 2018, p. 17)

Para que haja, portanto, a possibilidade de uma aprendizagem significativa ativa, não bastará apenas que o professor elabore um material potencialmente significativo e disponibilize-o para os alunos. Deverá haver por parte dos alunos uma disposição (mobilização) para, no decorrer do processo, fazer as relações necessárias com os seus conceitos já conhecidos de forma não arbitrária e substantiva, conforme os pressupostos da construção de conceitos nas relações cognitivas. Em contrapartida, de nada adiantará se o aluno estiver disposto a fazer essas interações entre significados em sua estrutura cognitiva se o material preparado pelo professor não for suficientemente significativo e não houver as ligações conceituais. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). A aprendizagem significativa ativa depende invariavelmente da interação de um aluno, disposto a fazer as correlações necessárias, com um material elaborado para o mesmo fim e um professor devidamente preparado para servir de auxiliador nesse processo.

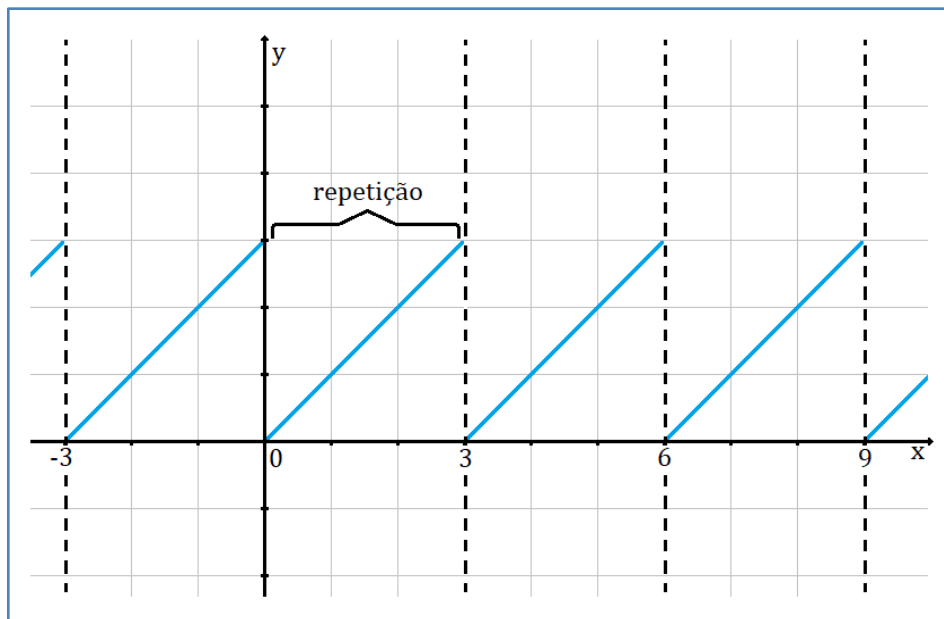
## 2.2 ELEMENTOS MATEMÁTICOS

### 2.2.1 Funções Periódicas

O conceito de função é talvez o conceito matemático mais utilizado nas diversas áreas do conhecimento. Através de funções específicas conseguimos expressar diversos tipos de fenômenos, como tendências, movimentos, crescimentos, etc. Quando o fenômeno descrito por essa função se repete em intervalos (de tempo, de distância, etc.) iguais, a função que o descreve é dita função periódica, veja a Figura 1.

Segundo Leonardo (2013, p.43) uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada função periódica quando existe um número real positivo  $p$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x + p)$ . Dessa definição, destaca-se a constante  $p$  que nada mais é do que o período fundamental ou período da função.

Figura 1 – Exemplo de função periódica



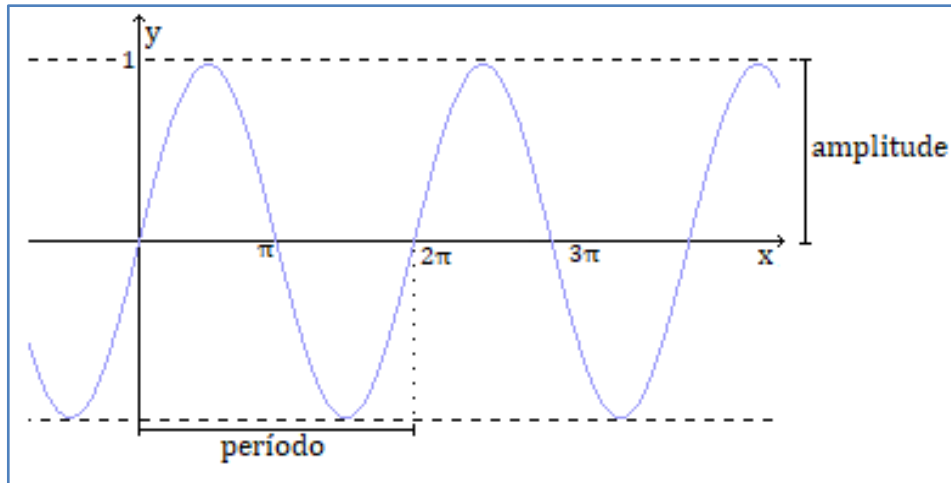
Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível relacionar as funções periódicas diretamente com o estudo das chamadas senoides, isso porque muitos dos comportamentos periódicos podem ser modelados através de funções trigonométricas do tipo  $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$  sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  números reais com  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ . De mesmo modo elas também podem ser descritas como  $f(x) = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$ . Em ambos os casos,



normalmente se utiliza valores positivos para  $b$  e  $c$ , para encontrar a imagem desta função como sendo  $[a - b, a + b]$  e o período pode ser encontrado com a razão  $2\pi/c$ .

Figura 2 – Função  $f(x) = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para tanto será definido, conforme Leonardo (2013) que o *Período* de uma função pode ser entendido como o intervalo decorrido entre dois pontos mínimos ou dois pontos máximos seguidos da função, isto é, quando há a repetição do “padrão” da função. *Frequência*, que como o nome nos sugere, é o número de períodos que acontecem em um intervalo determinado, que usualmente se define pela razão  $1/T$ , sendo  $T$  o período. A *Amplitude* é definida como sendo a diferença entre o maior e o menor valor da imagem em relação ao ponto médio encontrado na função, portanto, ela será apresentada como a metade da diferença entre o maior e o menor valor encontrados. A Figura 2 exibe em nível geométrico a distinção entre os conceitos de amplitude e período. Por fim, a *Fase* será definida como a translação da função em relação ao eixo horizontal, isto é, quando chega a seu ponto mínimo inicia a sua fase crescimento e após atingir o ponto máximo inicia a sua fase decrescimento.

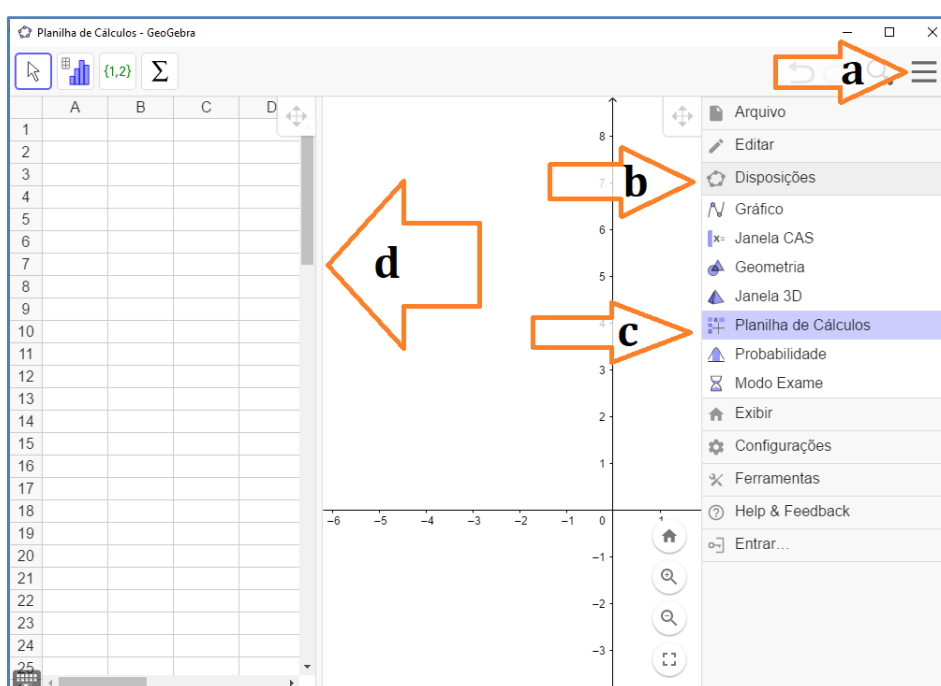
### 2.2.2 Projeção de gráficos no Geogebra Classic 6

Provavelmente o software matemático mais conhecido atualmente, o Geogebra é um conjunto de ferramentas matemáticas que disponibiliza uma alta gama de possibilidades para o usuário. Por ter versões online e gratuitas, além das tradicionais versões disponíveis para download, se torna uma ferramenta primordial

e de muito fácil acesso para estudantes e professores no estudo de diversas áreas do conhecimento que permeiam a matemática e suas vertentes.

No Geogebra Classic 6 (versão disponível para download em <https://www.geogebra.org/download>) para fazer a análise de dados obtidos é necessário conhecer algumas ferramentas básicas, tais como: planilha de cálculos, exportação de gráficos e inserção de gráfico de uma função através da janela de álgebra. Nesta seção serão apresentados os preceitos básicos para que seja possível utilizar as ferramentas citadas anteriormente.

Figura 3 – Janela Inicial: Geogebra Classic 6



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Geogebra Classic 6.

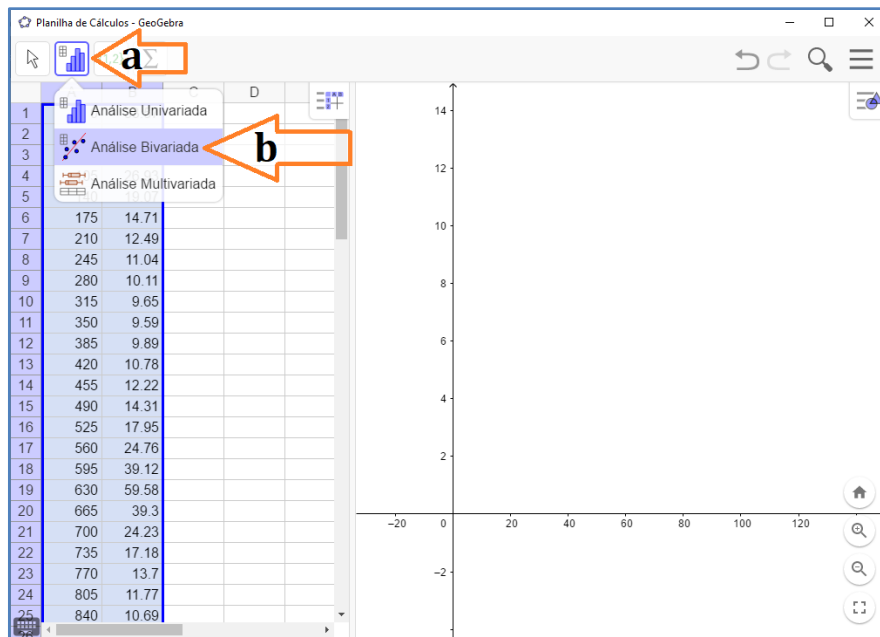
Ao iniciar o aplicativo deve-se selecionar o modo gráfico, e conforme a Figura 3 seguir os passos em ordem para:

- a) em “a” selecionar com o botão esquerdo do mouse o menu lateral da janela principal;
- b) em “b” abrir a seção “*Disposições*”;
- c) selecionar o ícone da “*Planilha de Cálculos*” que abrirá à esquerda da tela principal conforme “d”.

Na Planilha de Cálculos serão utilizadas apenas as colunas “A” e “B” conforme a Figura 4 para preenchimento dos dados. Na coluna “A” estarão dispostos os valores para o eixo  $x$  (*horizontal*) do gráfico a ser produzido. Já na

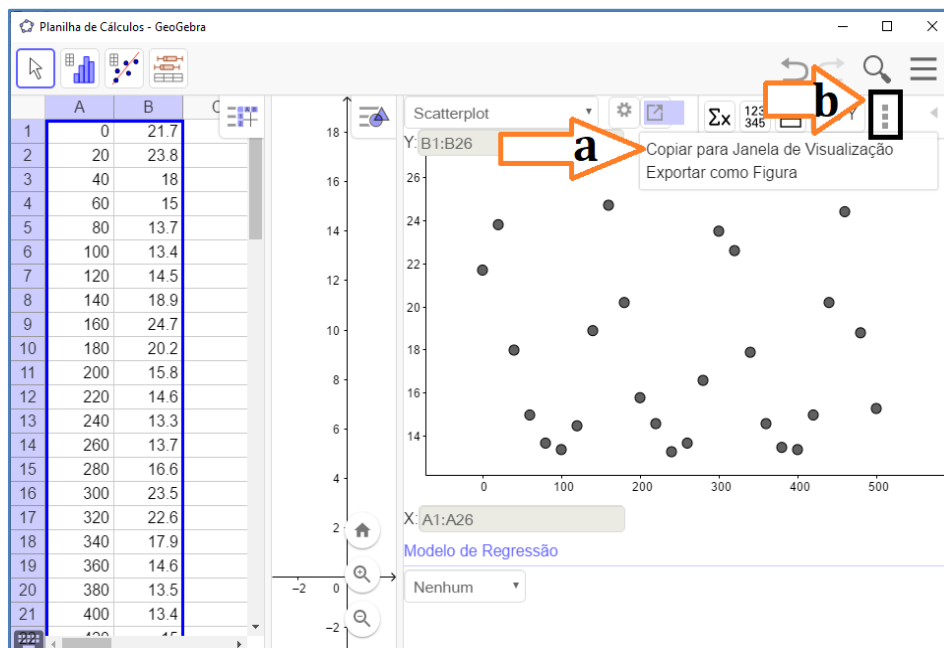
coluna B, estarão dispostos os valores do eixo *y* (*vertical*) do gráfico. Após o preenchimento dos dados por completo, deve-se selecionar as duas colunas com os dados por completo e abrir o ícone de Análise como em “a” da Figura 4 e selecionar o botão “Análise Bivariada” conforme “b”, para geração de um gráfico de pontos.

Figura 4 - Planilha de Cálculos: Geogebra Classic 6





Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Geogebra Classic 6.

Figura 5 – Copiando o Gráfico para a Janela de Visualização

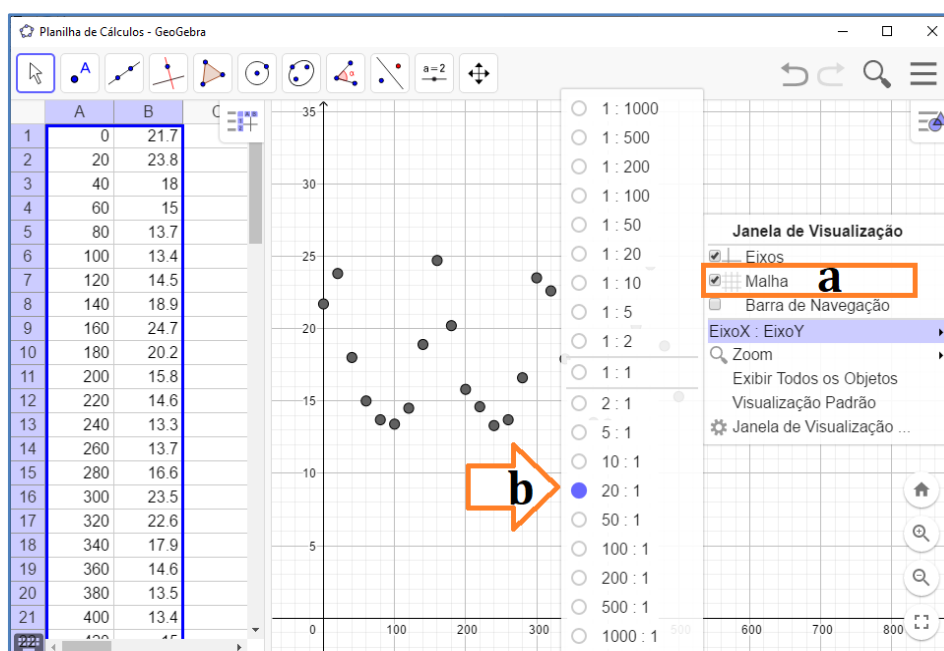


Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Geogebra Classic 6.

Após essa etapa, haverá uma sobreposição de janelas conforme Figura 5 para facilitar a visualização do gráfico será necessário selecionar o botão  como em “a” da mesma figura e selecionar sobre o item “Copiar para Janela de Visualização”. Após essa etapa, pode-se fechar essa janela gráfica adicional selecionando o botão  como em “b” da mesma figura e selecionar o item “Fechar”.


Após a conclusão dessas etapas, para facilitar a análise visual dos valores encontrados, aconselha-se ajustar o zoom da janela de visualização (como botão de rolagem do mouse) além de verificar a seleção da visualização das malhas, como em “a” da Figura 6, bem como ajustar a proporção da escala, como em “b” da mesma figura.

Figura 6 – Ajuste da janela de Visualização: Geogebra



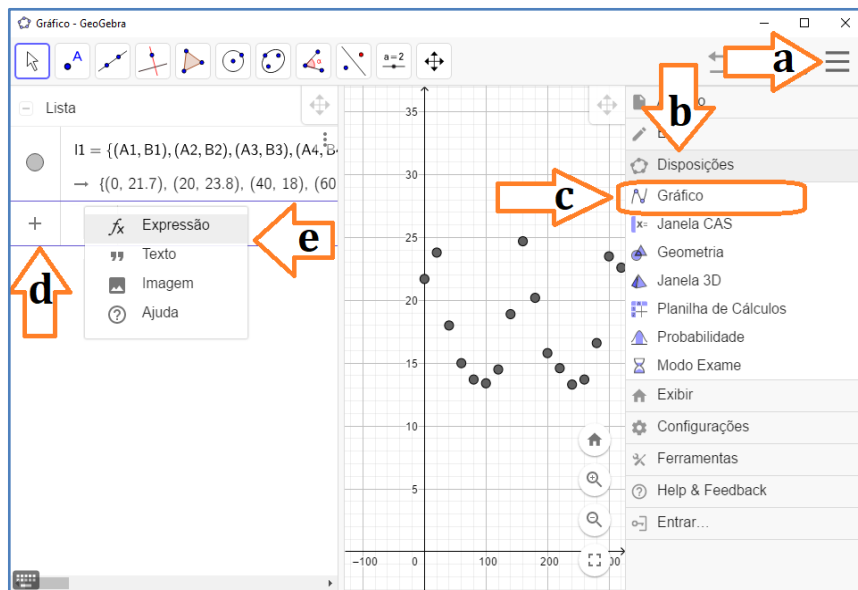
Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Geogebra Classic 6.

Desta maneira, com a janela de visualização ajustada é possível analisar ponto a ponto cada um dos resultados preenchidos na tabela e também se têm a possibilidade de projetar que curva característica mais se aproxima dos valores encontrados, bem como adicionar gráficos de funções para visualizar qual delas se adapta melhor ao tipo de aproximação que se almeja. Para adição dessas funções, basta seguir o passo a passo abaixo, representado na Figura 7:

- a) selecionar o botão  (menu principal) na parte superior esquerda do aplicativo;

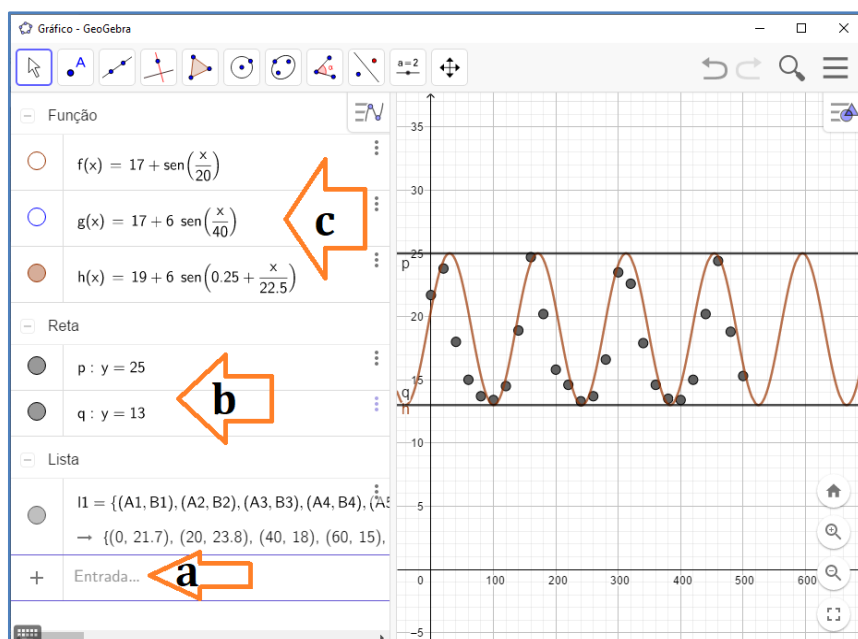
- b) selecionar a aba “Disposições”;
- c) clicar sobre o botão “Gráfico”. Neste momento, a janela gráfica irá se sobrepor à Planilha de Cálculos no canto esquerdo da janela do aplicativo;
- d) para adicionar o gráfico de uma função, basta clicar no botão  $+$  e então;
- e) selecionar o botão  $f_x$  “Expressão” e descrever no espaço selecionado qual a função que deverá ser adicionada a janela de visualização.

Figura 7 – Gráfico de Função na Janela de Visualização: Geogebra Classic 6



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Geogebra Classic 6.

Figura 8 – Adicionando Gráficos Diversos: Geogebra Classic 6



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Geogebra Classic 6.

Conforme a Figura 8, em “a”, no campo de entrada é possível que o usuário adicione retas, lista de pontos e funções variadas de acordo com sua necessidade. Todos os objetos adicionados aparecerão na lista da janela gráfica à esquerda e estarão dispostos separadamente conforme categoria (organizados automaticamente pelo aplicativo).

Nessa figura, em “b”, estão representadas duas retas as quais foram utilizadas como balizas para os pontos máximo e mínimo da função senoide a qual se pretende ajustar. O método de entrada deve ser preenchido com notação matemática equivalente à função ou equação. Já em “c”, tem-se as funções que estão sendo utilizadas para projeção da representação dos pontos encontrados. Para que os objetos (funções, retas e pontos) apareçam na Janela de Visualização, os botões mostrados à esquerda de cada elemento devem estar selecionados, isto é, com seu interior pintado da cor escolhida. Na Figura 8, por exemplo, estão selecionadas a lista de pontos, as retas  $p$  e  $q$ , e a função  $h(x)$ .

## 2.3 ELEMENTOS DE ASTRONOMIA

Talvez a mais antiga das ciências, a Astronomia tem suas origens ainda na pré-história, cerca de 50 milênios atrás, quando a espécie humana aprendeu a registrar aquilo que se sabia até então. Gravações em pedras representando grupos estelares, alinhamentos de rochas, na maioria das vezes em direção ao nascer do Sol, como o conhecido monumento em Stonehenge são alguns dos registros deixados pelos antigos povos que habitavam principalmente a Ásia e a Europa. (FARIA, 1987)

### 2.3.1 Fundamentos de Astronomia

#### 2.3.1.1 Planetas Inferiores e Superiores

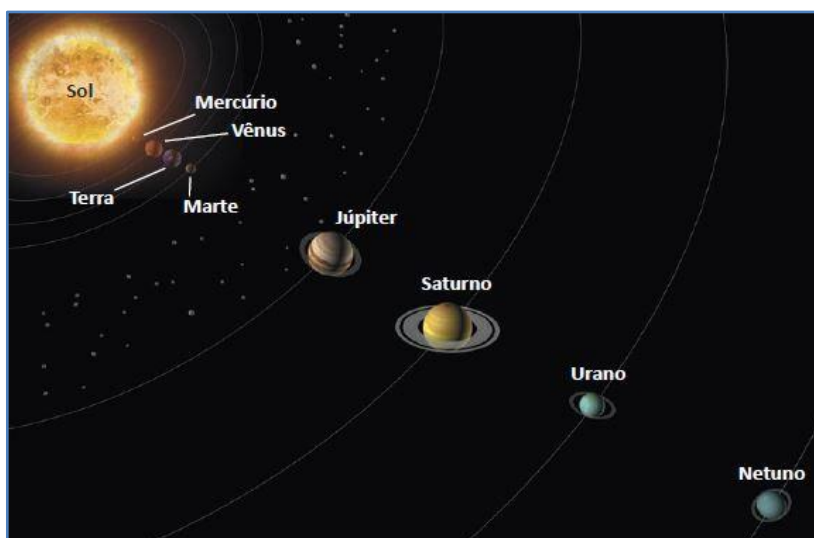
No Sistema Solar (Figura 9), cada planeta tem sua própria órbita, isto é, o “caminho” percorrido por ele no movimento de translação em relação ao Sol. De acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2000), dois grupos de planetas podem ser definidos com base na órbita da Terra. Os planetas que têm a distância média em relação ao Sol menor que a da Terra em relação ao Sol, portanto menores órbitas,

são chamados de planetas inferiores. Os planetas que tem suas órbitas maiores que a da Terra são chamados de planetas superiores, assim sendo:

- a) planetas inferiores: Mercúrio e Vênus;
- b) planetas superiores: Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão.

Os planetas inferiores estão muito próximos ao Sol quando vistos da Terra e por esse motivo sempre os enxergaremos a olho nu antes do nascer ou depois do pôr do sol (dependendo da elongação) quando a luminosidade solar é menor. Já os planetas superiores podem estar a qualquer distancia angular do Sol, por terem órbitas maiores que a da Terra, e podem ser observados a qualquer período da noite.

Figura 9 – Planetas no Sistema Solar



Fonte: SISTEMA, [2019?].

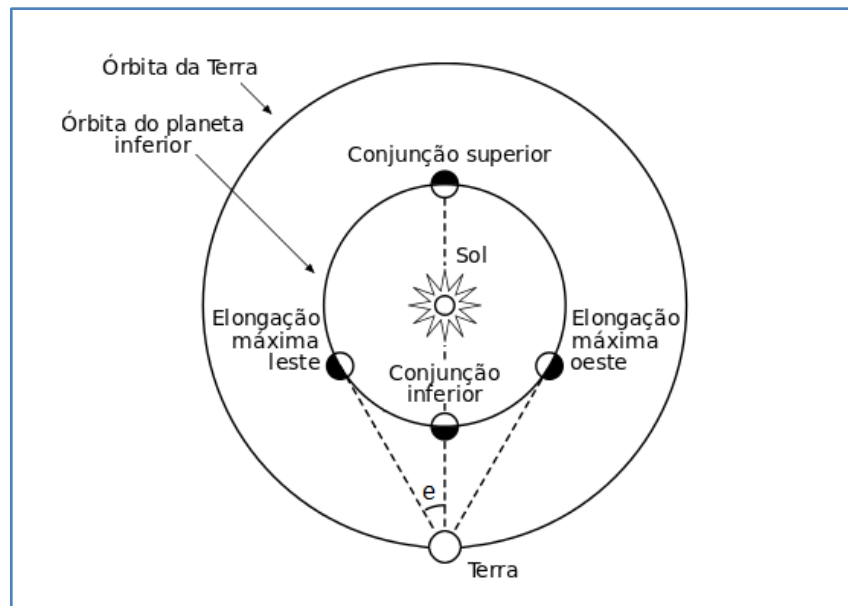
### 2.3.1.2 Configurações Planetárias

Para Oliveira Filho e Saraiva (2000), definimos as configurações planetárias, que são as suas posições em suas órbitas, através da definição de elongação ( $e$ ), que é a distância angular do planeta ao Sol, vista da Terra. No caso dos Planetas Inferiores, representados na Figura 10 – Configuração de Planetas Inferiores, existem as seguintes configurações:

- a) conjunção inferior: O planeta está na mesma direção do Sol ( $e=0$ ) e mais próximo à Terra. Neste caso o planeta está “na frente” do Sol.

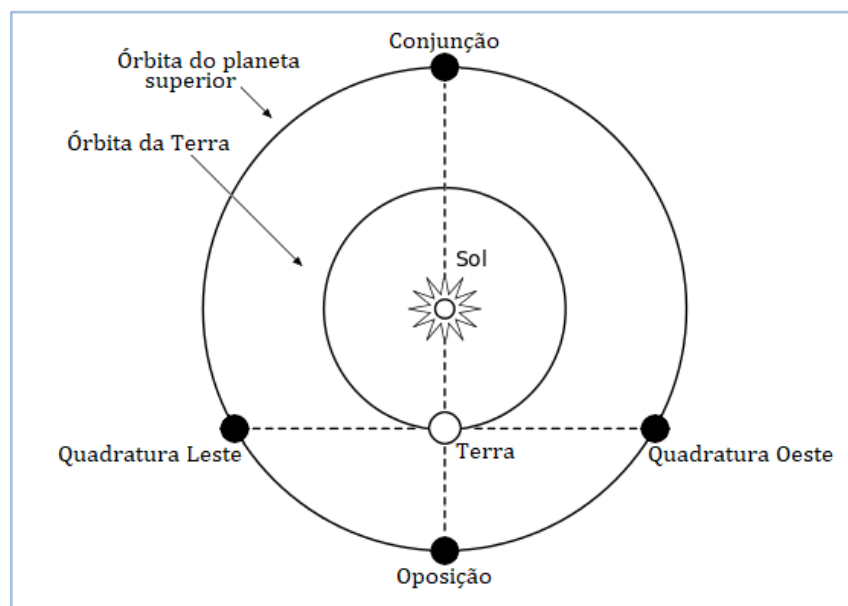
- b) conjunção superior: O planeta está na mesma direção do Sol ( $e=0$ ) e mais distante da Terra que o Sol. Neste caso o planeta está “atrás” do Sol.
- c) máxima elongação: a distância angular entre o planeta e o Sol é a máxima possível.

Figura 10 – Configuração de Planetas Inferiores



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – Configuração de Planetas Superiores



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para os Planetas Superiores existem as configurações listadas a seguir, representadas Figura 11:



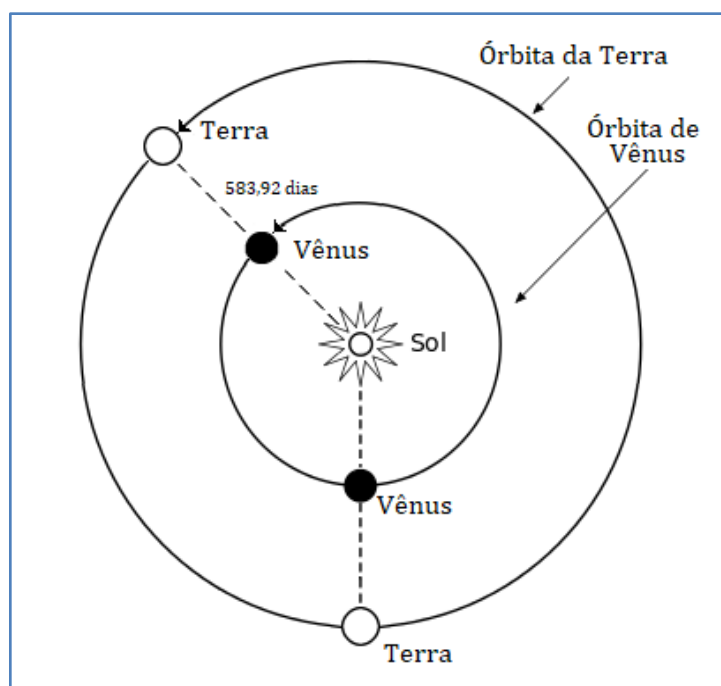
- a) conjunção: o planeta está na mesma direção do Sol ( $e=0$ ), e mais distante da Terra que o Sol. Neste caso o planeta estará “atrás” do Sol.
- b) oposição: o planeta está na direção oposta ao Sol ( $e=180^\circ$ ). Neste caso o planeta estará no céu durante todo o período da noite.
- c) quadratura ( $e = 90^\circ$ ): o planeta está 6 h a leste do Sol (quadratura oriental/leste) ou a oeste (quadratura ocidental/oeste).

### 2.3.1.3 Período Sinódico e Sideral

O constante movimento de revolução dos planetas em torno do Sol faz com que as configurações apresentadas anteriormente aconteçam de forma consecutiva de tempos em tempos. Para representar essa repetição de configurações consideramos dois tipos distintos de período.

Segundo Oliveira Filho e Saraiva (2000, p.57) o Período Sinódico “é o intervalo de tempo decorrido entre duas configurações iguais consecutivas”, veja Figura 12. Neste caso, estamos considerando o período de revolução aparente do planeta. Por exemplo, quando observamos o movimento de Vênus, a partir de um ponto qualquer na Terra, percebemos que o tempo decorrido entre duas configurações iguais consecutivas é de aproximadamente 584 dias.

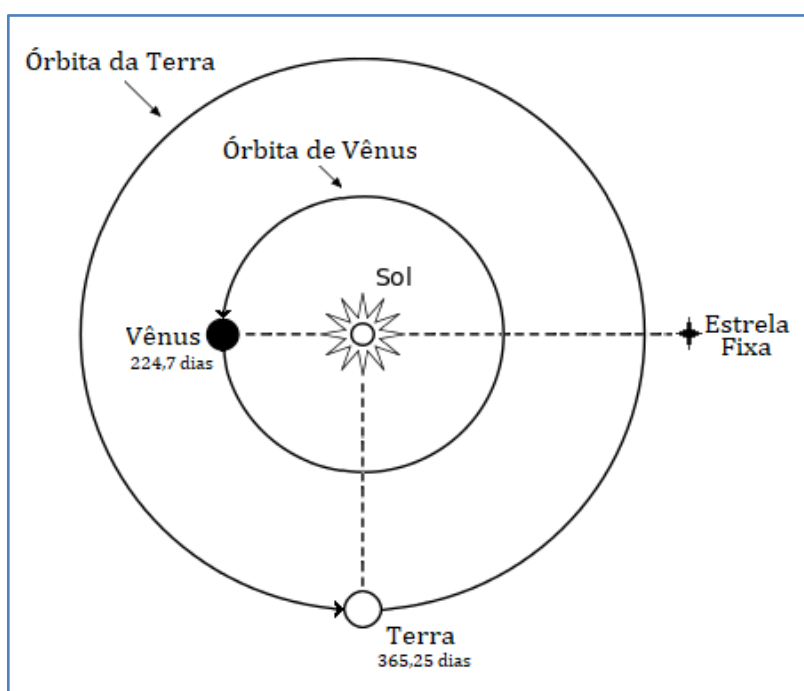
Figura 12 – Período Sinódico



Fonte: Elaborado pelo autor.

Período Sideral, Figura 13, segundo Oliveira Filho e Saraiva (2000 p.57) “é o intervalo de tempo *real* de translação do planeta em torno do Sol, em relação a uma estrela fixa”. No caso da Terra, esse período é de aproximadamente 365.25 dias. Já para Vênus, esse período é menor, aproximadamente 224,7 dias terrestres. Isso significa, portanto, que tanto a Terra quanto Vênus completaram uma revolução em torno do Sol, como representado na seguinte figura, não importando qual a configuração dos mesmos entre si.

Figura 13 – Período Sideral



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 2.3.1.4 Diâmetro Angular de um Objeto

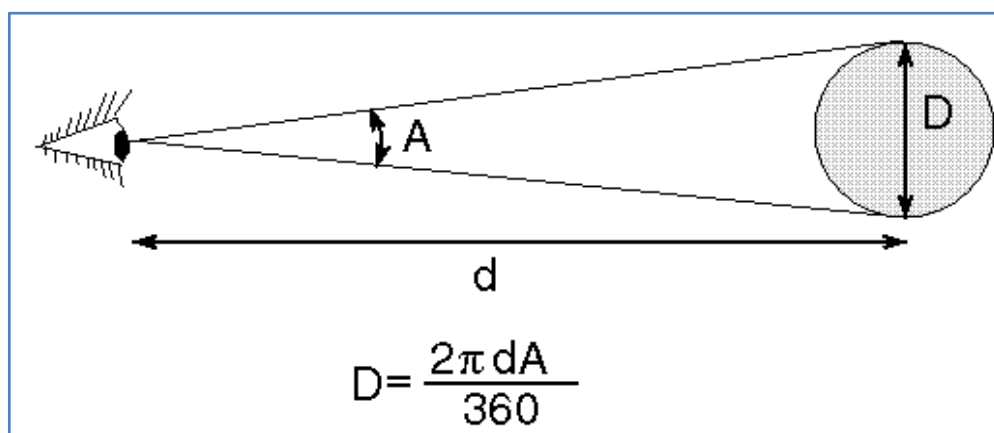
Quando observamos um objeto que está a certa distância dos nossos olhos, o seu tamanho real diminui à medida que ele fica mais distante. O Diâmetro Angular de um Objeto é o diâmetro aparente deste objeto visto a partir da localização do observador, sendo medido em graus. Por exemplo, ao segurarmos uma pequena moeda em frente aos nossos olhos, que tenha aproximadamente 1 *cm* de diâmetro, e esticarmos nosso braço ao máximo, para distanciá-la (em média essa distância é de 55 *cm*), o diâmetro angular da moeda será equivalente a 1°(leia-se um grau).

Em Astronomia, podemos observar no céu durante a noite, além das várias estrelas, diversos outros corpos celestes, dentre eles alguns planetas, a Lua,

asteróides, etc. Como cada corpo celeste no céu move-se em detrimento ao movimento de rotação da Terra, e alguns objetos ainda se movem em suas próprias órbitas, a variação do diâmetro angular depende diretamente do tamanho real deste objeto e da distância deste objeto em relação ao ponto de observação, conforme equação da Figura 14.

Para ilustrar, podemos comparar os diâmetros angulares da Lua, em uma noite qualquer, e da moeda referida anteriormente. Conforme Oliveira Filho e Saraiva (2000) a distância média da Lua até a Terra é de 384 000 *km* e seu diâmetro angular médio é de 31' 5" (leia-se trinta e um minutos e cinco segundos de arco, ou também pode ser representado por 0,518°).

Figura 14 – Diâmetro angular de um objeto



Fonte: FRANCISCO, 2017.

Assim, para que a moeda tenha o mesmo diâmetro angular da Lua, em seu valor médio, devemos distanciá-la a aproximadamente 1,1 *m* do observador, conforme verificamos na equação abaixo:

$$0,01 = \frac{2\pi \times d \times 0,518^\circ}{360^\circ}$$

e, portanto,

$$d = \frac{0,01 \times 360^\circ}{2\pi \times 0,518^\circ} \cong 1,106$$

Analogamente, com base na distância conhecida deste objeto juntamente com o diâmetro angular podemos então calcular o seu tamanho real. Através da equação apresentada, deduz-se então que o diâmetro da Lua é de 3476 *km*.

### 2.3.2 Stellarium

O Stellarium é um software gratuito, idealizado e inicialmente desenvolvido pelo engenheiro francês Fabien Chéreau, que transforma um computador em um planetário de projeção virtual em 3D em tempo real, a Figura 15 exibe a figura de inicialização do software. Calcula as posições do Sol e da Lua, planetas e estrelas, e desenha como é a projeção do céu para um observador com base na sua localização, data e hora atuais. Também consegue fazer projeções desenhando constelações e simular fenômenos astronômicos, como chuvas de meteoros ou cometas e eclipses lunares ou solares.

Figura 15 – Apresentação: Stellarium v.0.19.0



Fonte: STELLARIUM, 2019.

Com o Stellarium é possível visualizar mais de 600 mil estrelas, 80 mil objetos do céu profundo, linhas e ilustrações das constelações, planetas e seus satélites além de visualizar um nascer e pôr-do-sol realistas e com projeção da atmosfera. Por ter uma interface de fácil manuseio, pode servir de auxílio para o planejamento de observações noturnas e até mesmo no direcionamento de binóculos e telescópios. O software, disponível para download em <http://www.stellarium.org/pt/>, tem versões disponíveis para os principais sistemas operacionais atuais, e suas

configurações mínimas exigidas são totalmente possíveis de se alcançar com qualquer computador atual de médio desempenho.

Quando aberto, o aplicativo projeta o observador no meio de um campo verde com um horizonte plano sob um céu limpo, como visto na Figura 16. Dependendo da data e hora do computador, o software irá projetar sendo dia ou noite. Caso esteja conectado a internet, o aplicativo também detectará a localização atual através da rede. Na parte inferior da tela está localizada a Barra Principal de Ferramentas, onde podem ser visualizados os dados de localização, tempo, o campo de visão vertical (CDV) e taxa de quadros (FPS) da imagem mostrada. Ao deslizar o mouse sobre ela, uma barra de configurações rápidas aparecerá para o usuário. Nela ele pode alterar configurações de visualização, como grades de localização, habilitar/desabilitar a visualização da superfície, da atmosfera, rotulos de planetas, satélites artificiais, etc, além de habilitar/desabilitar a ferramenta de medição angular. Na barra lateral é possível, através dos ícones, abrir as janelas de localização, de configuração de data e hora, de pesquisa, de opções do céu e visualização.

Figura 16 – Janela inicial – Stellarium v.0.19.0



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Stellarium v.0.19.0.

Para fazer uma busca rápida de objetos, é necessário seguir as etapas abaixo:

- a) abrir a barra lateral de ferramentas e selecionar o botão janela de pesquisa (é possível abri-la através do botão F3 do teclado);




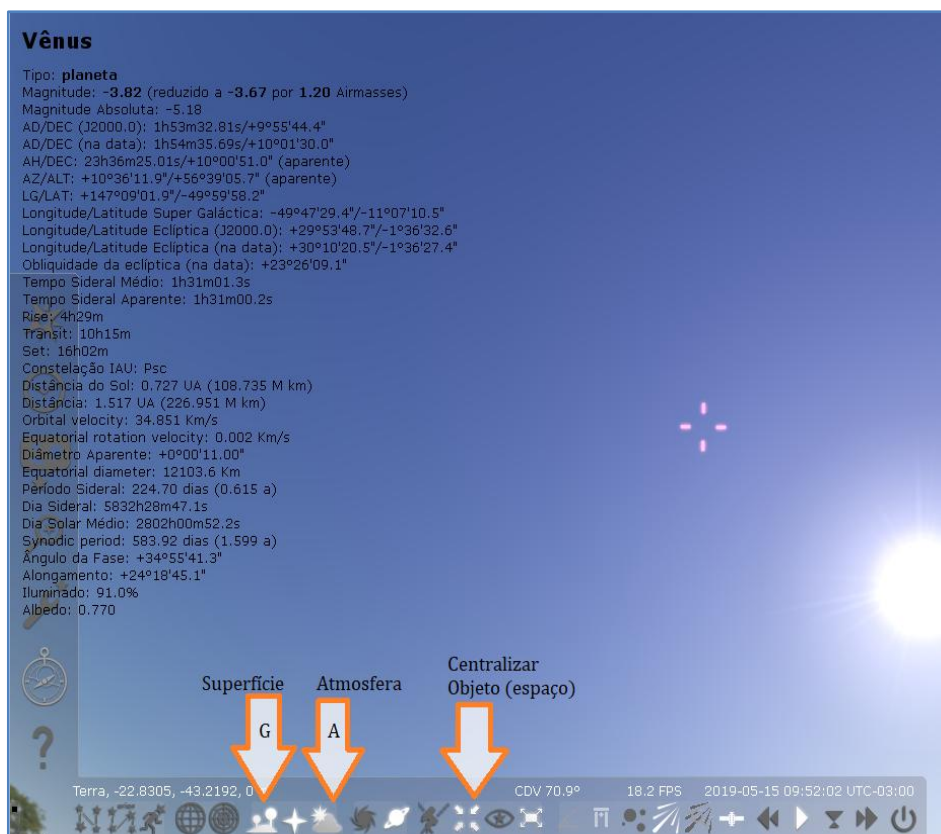
- b) digitar o nome do objeto procurado e clicar *Enter* no teclado, veja a Figura 17;
- c) para facilitar a observação, abrir a barra inferior, conforme Figura 18 e verificar se o botão *Centralizar Objeto*  está selecionado (pode-se utilizar a barra de espaço do teclado para habilitar/desabilitar essa função);
- d) caso o objeto esteja centralizado mas não esteja aparecendo, verificar se ele não está sob a superfície ou a luz do Sol está ofuscando sua identificação, e caso algum desses seja aplicável, abrir a barra inferior e desmarcar o botão *Superfície*  (a tecla G habilita/desabilita essa função) e/ ou o botão *Atmosfera*  (a tecla A habilita/desabilita essa função);
- e) quando selecionado e possível de se enxergar na tela para o observador, o objeto aparecerá com quatro pinos vermelhos girando seu contorno. Se necessário o usuário pode ajustar o zoom através do botão de rolagem do mouse.

Figura 17 – Pesquisa rápida Vênus: Stellarium v.0.19.0




Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Stellarium v 0.19.0.

Figura 18 – Vênus, botões e atalhos: Stellarium v.0.19.0



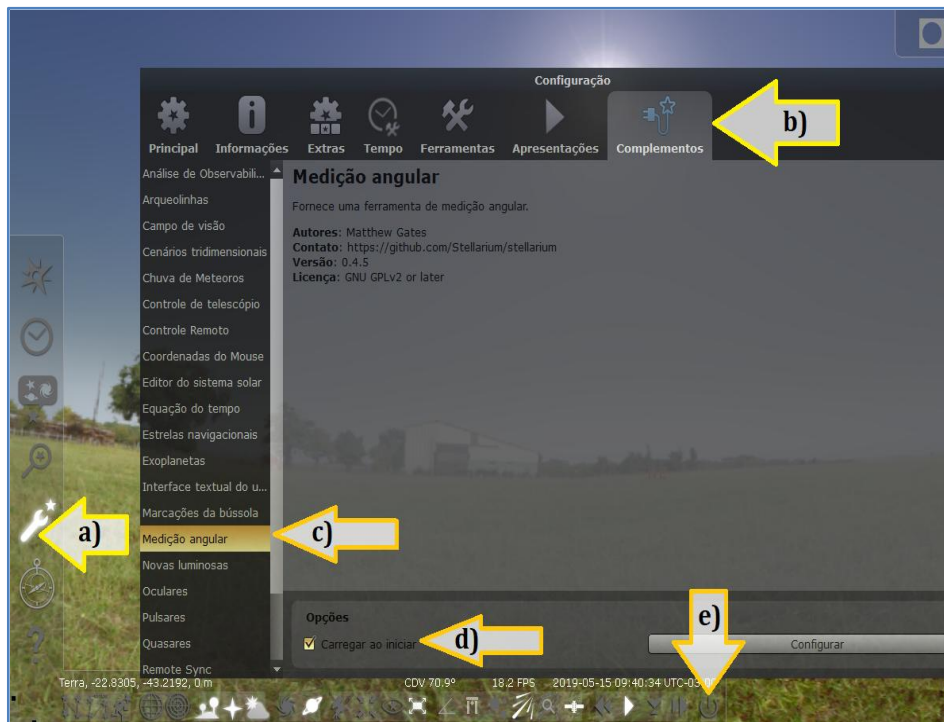
Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Stellarium v.0.19.0.

Também será necessário habilitar, no menu de configurações, o botão de medição de diâmetro angular. Para isso é preciso seguir os passos abaixo, ilustrados na Figura 19:

- abrir a barra lateral de ferramentas e selecionar o botão de configurações (também é possível o acesso rápido pelo botão F2 do teclado);
- na janela de configurações, selecionar o último submenu “*complementos*”;
- na barra da esquerda, selecionar o submenu “*medição angular*”;
- na parte inferior da tela selecionar o quadro “*carregar ao iniciar*”;
- após a conclusão dessas etapas o usuário deve fechar o aplicativo e reabri-lo para que as alterações sejam aplicadas;
- agora na barra inferior do aplicativo estará disponível o ícone  medição angular. Quando o botão estiver selecionado o mouse passará a ser somente a ferramenta de medição, não podendo ser utilizado como ferramenta de arraste de tela (movimentação). Quando isso acontece,

pode-se usar normalmente os botões de seta do teclado para fazer as movimentações necessárias para a medição angular.

Figura 19 – Habilitando a medição angular: Stellarium v.0.19.0



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Stellarium v.0.19.0.



### 3. DIÂMETRO ANGULAR NO STELLARIUM

Como já referido anteriormente, o diâmetro angular de um objeto é o diâmetro aparente deste objeto aos olhos do observador. No software Stellarium, para fazer essa medição, existe a necessidade de habilitar o botão conforme instruções e ilustração da Figura 19. Após a habilitação do botão de medição angular no Stellarium, é necessário seguir algumas etapas para que o processo seja feito sem que o usuário/aluno não acabe perdendo o objeto de estudo da tela.

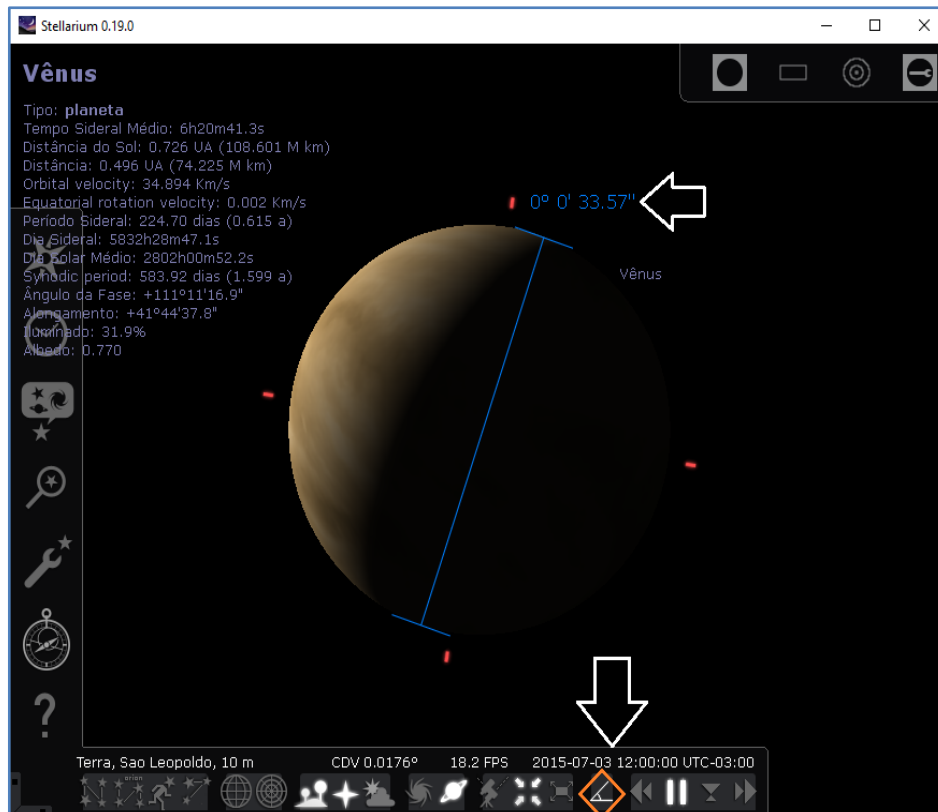
Seguindo a sequência já apresentada nas Figura 17 e Figura 18, o objeto estará selecionado e centralizado na tela do software. Dependendo do tamanho do objeto selecionado é aconselhável para o usuário aumentar ou diminuir o zoom da tela, utilizando o botão de rolagem do mouse ou utilizando as teclas “Ctrl” e “↑” ou “↓” simultaneamente, até que o objeto esteja suficientemente visível, conforme Figura 20, para que assim possa efetuar a medição de maneira mais precisa e confiável.

Para efetuar a medição propriamente dita, ao habilitar o botão o usuário ativa a medição direta, isto é, para medir qualquer espaço mostrado na tela o usuário deverá clicar e manter pressionado o botão esquerdo do mouse, arrastando o cursor até o ponto final de medição. Deve-se levar em consideração que a ferramenta mede apenas entre os pontos selecionados conforme referido anteriormente e, portanto para se ter uma melhor precisão de medição em caso de corpos não luminosos é necessário que se utilize o maior diâmetro visível, considerando que dependendo da configuração em relação ao Sol esses corpos podem estar com boa parte de sua superfície visível coberta por sua sombra.

Conforme a Figura 20, o valor do diâmetro angular aparente de Vênus para o dia 3 de julho de 2015 às 12 h com localização nas proximidades da cidade de São Leopoldo-RS é de 33,57" (equivalente a aproximadamente  $0,009325^\circ$ ).

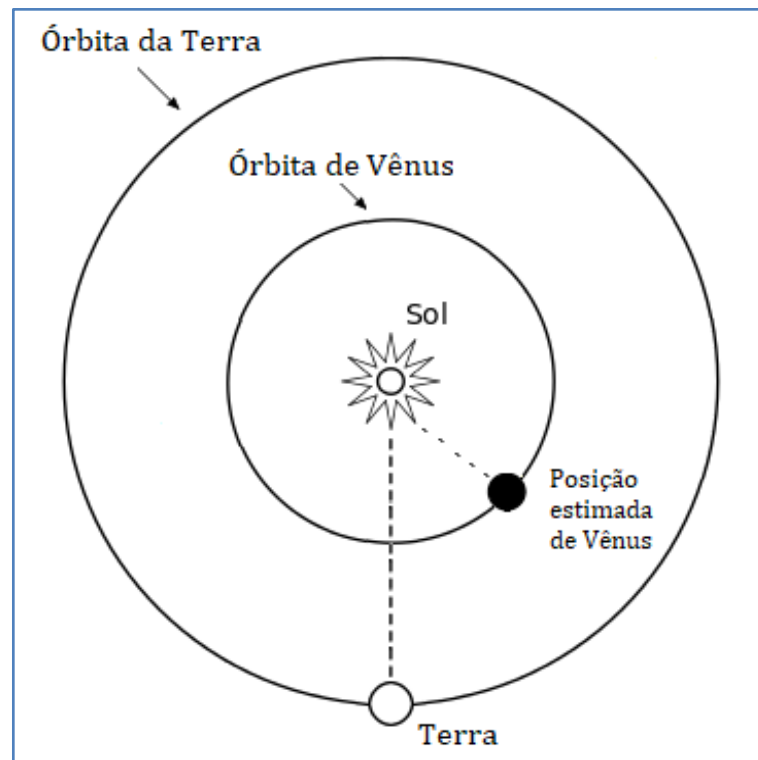
Com apenas uma medida feita não conseguiríamos estimar se Vênus está em fase de crescimento ou de decréscimo do diâmetro angular e nem se este valor está mais próximo do maior ou do menor diâmetro aparente possível. Sob ponto de vista posicional, pela sombra que a luz do Sol faz em sua superfície e sabendo que é um Planeta Inferior, conseguimos definir que ele está a leste do Sol. Também é possível delimitar que está mais próximo da Terra que o Sol, pois a maior parte de sua superfície visível a partir da Terra está sombria o que nos leva a poder estimar a sua posição nesta medição conforme a Figura 21.

Figura 20 – Vênus: Stellarium v.0.19.0



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Stellarium v.0.19.0.

Figura 21 – Posição estimada de Vênus em 03/07/2015



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da Figura 21 é possível analisar que o comportamento dos valores a serem encontrados nas próximas medições influenciará diretamente na avaliação de como Vênus e Terra estão se movimentando em suas órbitas. Sempre se utiliza o Sol como base para as avaliações posicionais entre os dois planetas não importando em que ponto de suas órbitas eles estão, desde que a configuração em relação ao Sol seja estabelecida. Para ser possível verificar as outras mudanças que o movimento de Vênus em sua órbita traz para o observador é necessário que seja feita uma série de medições, todas seguindo o mesmo procedimento utilizado para o registro, de acordo com a Figura 20.

Para aperfeiçoar a escolha dos dias que serão feitas essas novas medições, é necessário levar em consideração quantos são os períodos que serão observados, quanto tempo disponível haverá para essa atividade e qual o número máximo desejado de medições para essa avaliação. É através dessas definições que será baseado o cálculo do intervalo entre as medições.

De acordo com o software Stellarium, o período sinódico de Vênus é de 583,92 dias e isto significa dizer que Vênus estará em mesma configuração em relação ao Sol e a cada 584 dias aproximadamente. Sob esta perspectiva, pode-se afirmar então que quando houver, no caso de Vênus, uma conjunção inferior (Figura 10), este será o período em que Vênus estará mais próximo à Terra e, por ser um movimento periódico definido, levará cerca de 292 dias para que esteja em conjunção superior, sendo então a sua maior distância em relação à Terra.

Para o levantamento de dados da Tabela 1 foi definido que seriam observados um total de três períodos sinódicos completos, com no máximo 50 medições neste período. Para calcular o número de dias que serão necessários entre cada uma das medições foi utilizada a seguinte equação:

$$d = \frac{Ps \times R}{m}$$

então,

$$d = \frac{583,92 \times 3}{50} \cong 35,035$$

onde  $d$  é o intervalo em dias,  $Ps$  é o período sinódico do planeta,  $R$  é o número de repetição dos períodos e  $m$  é o número de medições que se quer fazer.

Com base nesses procedimentos, foi delimitado que a primeira medição seria a registrada na Figura 20 e as demais seriam, portanto, a cada 35 dias, sempre no

horário das 12 h: pois como Vênus está sempre próximo ao Sol (a maior elongação de Vênus é de 48°), neste horário, para a localização próxima a São Leopoldo-RS, Vênus sempre estará no céu. Foram realizadas a partir desta data mais 50 medições e estão registradas na Tabela 1, sendo exibidos valores tanto em segundos de arco (colunas 2 e 5) como em graus (colunas 3 e 6).

Tabela 1 – Diâmetro Angular de Vênus de 03/07/2015 a 17/04/2020

DATA DA MEDIÇÃO	DIÂMETRO MEDIDO	DIÂMETRO EM GRAUS	DATA DA MEDIÇÃO	DIÂMETRO MEDIDO	DIÂMETRO EM GRAUS
03/07/2015	33.57"	0.00933°	29/12/2017	9.78"	0.00272°
07/08/2015	55.97"	0.01555°	02/02/2018	9.80"	0.00272°
11/09/2015	44.50"	0.01236°	09/03/2018	10.14"	0.00282°
16/10/2015	26.93"	0.00748°	13/04/2018	10.88"	0.00302°
20/11/2015	19.07"	0.00530°	18/05/2018	12.40"	0.00344°
25/12/2015	14.71"	0.00409°	22/06/2018	14.83"	0.00412°
29/01/2016	12.49"	0.00347°	27/07/2018	19.55"	0.00543°
04/03/2016	11.04"	0.00307°	31/08/2018	29.06"	0.00807°
08/04/2016	10.11"	0.00281°	05/10/2018	50.13"	0.01393°
13/05/2016	9.65"	0.00268°	09/11/2018	56.55"	0.01571°
17/06/2016	9.59"	0.00266°	14/12/2018	33.21"	0.00923°
22/07/2016	9.89"	0.00275°	18/01/2019	21.86"	0.00607°
26/08/2016	10.78"	0.00299°	22/02/2019	16.27"	0.00452°
30/09/2016	12.22"	0.00339°	29/03/2019	13.21"	0.00367°
04/11/2016	14.31"	0.00398°	03/05/2019	11.47"	0.00319°
09/12/2016	17.95"	0.00499°	07/06/2019	10.38"	0.00288°
13/01/2017	24.76"	0.00688°	12/07/2019	9.79"	0.00272°
17/02/2017	39.12"	0.01087°	16/08/2019	9.63"	0.00268°
24/03/2017	59.58"	0.01655°	20/09/2019	9.90"	0.00275°
28/04/2017	39.30"	0.01092°	25/10/2019	10.53"	0.00293°
02/06/2017	24.23"	0.00673°	29/11/2019	11.51"	0.00320°
07/07/2017	17.18"	0.00477°	03/01/2020	13.26"	0.00368°
11/08/2017	13.70"	0.00381°	07/02/2020	16.05"	0.00446°
15/09/2017	11.77"	0.00327°	13/03/2020	21.10"	0.00586°
20/10/2017	10.69"	0.00297°	17/04/2020	31.72"	0.00881°
24/11/2017	10.09"	0.00280°			

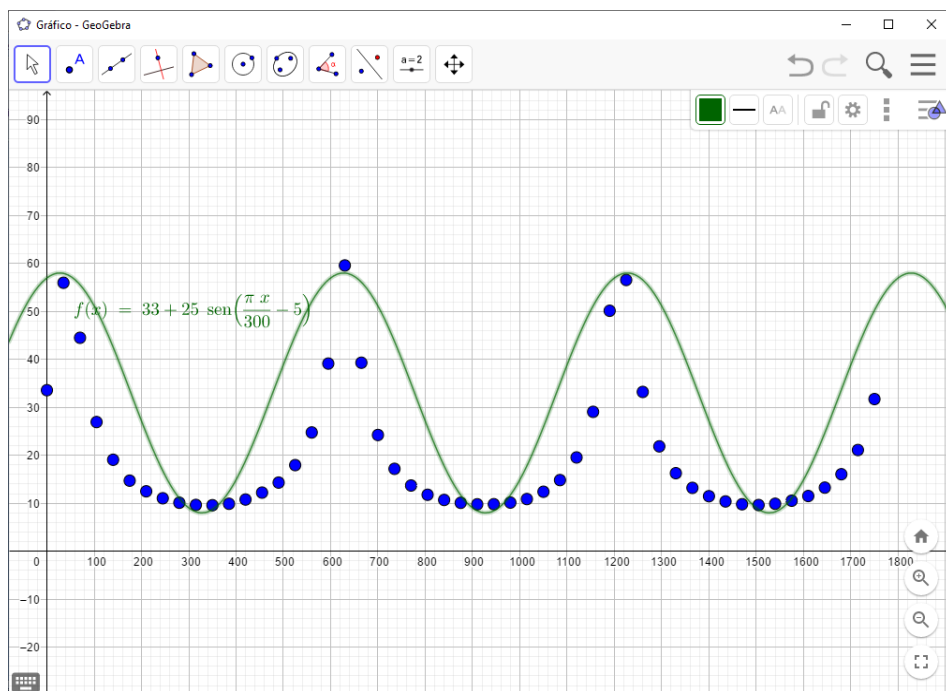
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao transportarmos esses dados para o Geogebra e transformá-los em um gráfico, conseguimos verificar que, mesmo não sendo uma função elementar periódica, como em uma função do tipo  $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$ , conseguimos prever seu comportamento dentro de um intervalo específico de tempo, podendo até traçar algumas linhas de base com valores mínimos e máximos, e quando o valor

encontrado se aproximará desses limites. Conseguimos também aproximar uma função do tipo  $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$  para que tenhamos uma espécie de linha de tendência para o comportamento verificado.

Para fazer essa aproximação utilizaremos a função ao mesmo tempo em que nele apresentamos visualmente as funções de cada uma das variáveis na função senoide apresentada. No exemplo da Figura 22, temos em azul os pontos das medições feitas no Stellarium e em verde a senoide como tentativa de ajuste para os valores encontrados conforme referenciado na Figura 8.

Figura 22 – Gráfico dos Valores da Tabela 1.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que a função adicionada está ajustada e tem os valores de amplitude, período e fases aproximados com os valores encontrados na medição feita no Stellarium.

## 4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo será apresentado um plano de ensino-aprendizagem que contemple o estudo introdutório de funções periódicas e trigonométricas sob a perspectiva da aprendizagem significativa de Ausubel.

### 4.1 DADOS GERAIS

Segundo a Base Nacional Comum Curricular o estudo dos movimentos periódicos, observáveis ou não, e sua relação com as funções trigonométricas deve ser apresentado durante o Ensino Médio, solicitando que o aluno deva

Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (BNCC, 2018, p.536).

Este planejamento leva em consideração a aplicação com alunos que estejam no segundo ano do Ensino Médio ou adiante.

#### 4.1.1 Objetivo Geral do Plano de Aula

Compreender os conceitos principais de uma função periódica através da observação planetária, medição do diâmetro angular de um planeta via software dedicado e ajuste de curva via software gráfico.

#### 4.1.2 Objetivos Específicos do Plano de Aula

- a) compreender alguns conceitos básicos de Astronomia para desenvolvimento de uma aprendizagem significativa;
- b) elaborar estratégias de medição de diâmetro angular via software de observação astronômica para compreender significativamente os conceitos de Amplitude, Período, Frequência e Fase de uma função.

#### 4.1.3 Materiais Necessários

Para o pleno desenvolvimento das atividades é necessário que haja computadores suficientes para que os alunos trabalhem individualmente e que os computadores tenham instalados os aplicativos Stellarium (v. 0.19) e Geogebra (v. Classic 6), bem como acesso à internet para que as pesquisas vinculadas à atividade possam ser realizadas de maneira mais rápida e objetiva. Se possível, deve haver um computador associado a um projetor, a fim de que sejam projetadas as imagens, e assim, o professor possa demonstrar as funções dos aplicativos em questão.

#### 4.1.4 Desenvolvimento do Plano de Aula

O desenvolvimento das atividades deve contemplar a aprendizagem ativa significativa que acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980) não é uma aprendizagem significativa por recepção, onde o aluno, mesmo que significativamente através de relações não arbitrarias em sua estrutura cognitiva, encontra uma aprendizagem de conteúdos que findam em si próprios. Nessa proposta, o aluno consegue estabelecer as mesmas relações feitas na proposição receptiva, porém consegue modificar os conceitos à sua necessidade, trazendo alternativas ao seu próprio método de raciocínio e fazendo com que os novos conceitos fixem de maneira significativa.

Inicialmente apresenta-se uma pequena lista de questionamentos aos alunos, sendo elas de caráter investigativo e para que sirvam de ancoragem aos novos conceitos. É solicitado aos alunos que criem definições curtas para:

- a) Astronomia;
- b) Sistema Solar;
- c) órbitas planetárias;
- d) planetas inferiores e superiores;
- e) período sinódico e período sideral;
- f) configurações planetárias;
- g) diâmetro angular de um astro/objeto.

Esta tarefa será composta de dois momentos. Um deles em sala de aula sem consulta, para que seja possível ao professor identificar qual a percepção do aluno

sobre os conceitos envolvidos na atividade e, portanto, identificar a presença dos conceitos prévios (subsunçores). No segundo momento é então solicitado aos alunos como tarefa de casa a composição, através de pesquisa, destas definições. Definir previamente que em todas elas, as fontes de pesquisa sejam informadas.

Após essa etapa, já em sala, o professor deve solicitar aos alunos que socializem em pequenos grupos as suas definições e, num momento final estas definições mais encorpadas, sejam socializados à toda a turma. O papel do professor neste momento é, além de mediar este debate, fomentar a interatividade dos alunos e mostrar que não há apenas uma definição para cada conceito (geralmente apenas a do professor) e sim que há um desenvolvimento conceitual baseado no que cada aluno já trás de bagagem intelectual e o encontro com os conceitos em sala de aula.

No curso da aprendizagem significativa, um estudante deve relacionar as partes componentes à sua estrutura cognitiva. O resultado é quase sempre alguma variação mínima entre a forma como o aluno internaliza a informação e como o professor percebe a informação. Conseqüentemente, numa revisão mais recente de afirmações ou proposições, pode haver uma pequena discrepância entre a resposta dada pelo aluno e aquela esperada pelo professor, mesmo quando a resposta do aluno está fundamentalmente correta. Infelizmente, tais respostas são frequentemente consideradas erradas, o que incentiva a preferência por parte dos alunos da aprendizagem automática, em lugar de compreender o que lhes é ensinado. (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980, p.43)

Essa interação serve, não só para o que já foi mencionado como também, para que algum aluno que por ventura não tenha entendido bem um ou mais conceitos possa tirar suas dúvidas com as definições feitas por seus colegas ou que consiga complementar seu entendimento com alguma informação que não havia captado.

Terminando a etapa anterior é necessário que haja uma apresentação por parte do professor quanto aos aplicativos que serão utilizados. O Geogebra, dependendo do grupo de alunos a ser utilizado, já poderá ser uma ferramenta de uso frequente, neste caso não sendo necessárias grandes apresentações além da definição das ferramentas que serão utilizadas no decorrer deste estudo. Caso não seja de conhecimento dos alunos, uma apresentação conforme a seção 2.2.2 já traria uma introdução ao que o aplicativo pode oferecer para essa atividade. Da mesma forma, quanto ao Stellarium é importante que o professor mostre aos alunos as funções básicas, já descritas na seção 2.3.2 deste trabalho, caso os alunos não



conheçam como ele funciona basicamente. Dessa forma o professor pode adicionar o tempo que lhe for necessário, antes da atividade principal, já fazendo algumas observações de possíveis problemas que apareçam durante o manuseio das ferramentas e melhorar a experiência dos alunos no uso dos aplicativos durante as atividades.

Superada mais essa etapa, solicita-se então que os alunos escolham um planeta cada, para que avancem à etapa de observação e medição de diâmetro angular. Estarão disponíveis para escolha os planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno devido às suas grandes variações de diâmetro angular observáveis, o que adiante na atividade gera mais possibilidades quanto ao trabalho de ajuste de funções.

Feita a escolha lança-se a atividade para os alunos, enunciada da seguinte maneira: “Com base nos conceitos que foram discutidos no início da aula, verifique durante três períodos sinódicos completos a variação de diâmetro angular do planeta escolhido. Você deverá fazer 40 medições com intervalos iguais entre cada uma delas e anotar em uma tabela o valor encontrado, a data da medição e os dias decorridos da primeira medição”. Neste momento, deve-se verificar com cada grupo de alunos (definidos quanto à escolha dos planetas), em relação à definição dos períodos sinódicos e como ajustar o número de dias entre cada medição. Nesta etapa o professor pode escolher Urano ou Netuno como exemplos (pois não estão disponíveis para escolha) e desenvolver um cálculo para demonstrar uma das maneiras possíveis de se encontrar esse valor do intervalo. É preciso ressaltar que não há dia certo para escolha de quando iniciar a busca e isso deve ficar claro para os alunos. Neste caso certamente teremos os mesmos planetas e medições diferentes em cada um deles. É preciso também deixar claro aos alunos que eles estão prestes a captar informações que serão diferentes dos demais e que isso que torna cada trabalho individual extremamente importante para o desenvolvimento desse novo saber.

Nesta etapa, enquanto os alunos estão fazendo as verificações e as medições dos planetas, o professor deve ir fomentando questões individuais como a percepção de posição diante das medições, instigando o aluno a quem sabe prever o que está acontecendo com o planeta durante essas observações, qual o tipo de entendimento e que visualização eles têm sobre os movimentos orbitais, etc. Tudo isso serve para corroborar com Becker (2015, p.25) quando diz que

Nessa relação, o professor e alunos avançam no tempo. As relações de sala de aula, de cristalizadas – com toda a dose de monotonia e tédio que as caracteriza – passam a ser fluidas. O professor construirá, a cada dia, a sua docência, dinamizando seu processo de aprender. Os alunos construirão, a cada dia, a sua ‘discência’, ensinando, aos colegas e ao professor, novos saberes, noções, conceitos, objetos culturais, teorias, comportamentos. Farão perguntas muitas delas banais, mas outras que desafiarão o professor. Mas o que avança mesmo nesse processo é a condição prévia de todo aprender ou de todo conhecimento, isto é, a capacidade construída de, por um lado, apropriar-se criticamente da realidade física ou social e, por outro, de construir sempre mais e novos conhecimentos ou capacidades.

No desenvolvimento desta etapa muitos alunos, talvez já estejam entendendo que forma esses valores estão tomando e como ele poderá encontrá-los nos próximos momentos e isso é parte importante no processo de internalização dos conceitos apresentados. Essa é a etapa mais demorada desse processo, dentro dela estão as atividades de identificação de intervalo de medições, de escolha das datas, de medição propriamente dita, de retenção dos dados de maneira confiável e de avaliação dos dados encontrados.

Espera-se, por parte dos alunos, que durante essa etapa da atividade, seja construída uma tabela que se aproxime em relação aos dados recolhidos, à Tabela 2 mostrada abaixo.

Tabela 2 – Projeção dos Dados Obtidos

<b>Nº Medição</b>	<b>Dias Após 1ª Medição</b>	<b>Diâmetro Encontrado</b>	<b>Data</b>
<b>1</b>	0	33,57"	03/07/2015
<b>2</b>	35	57,69"	13/08/2015
<b>3</b>	70	36,50"	23/09/2015
<b>4</b>	105	26,93"	16/10/2015
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...
<b>37</b>	1260	33,21"	14/12/2018
<b>38</b>	1295	21,86"	18/01/2019
<b>39</b>	1330	16,27"	22/02/2019
<b>40</b>	1365	13,21"	29/03/2019

Fonte: Elaborado pelo Autor

Na etapa seguinte, o professor deve solicitar aos alunos que insiram os dados encontrados no Geogebra. Nessa etapa, após a inserção dos dados e geração do gráfico de pontos (diâmetro encontrado x dias após primeira medição), serão lançados questionamentos aos alunos. São eles:

- a) Quais são os três valores máximos que você encontrou nas medições efetuadas? Quais são os três valores mínimos? Qual é a maior diferença encontrada entre o máximo e o mínimo?
- b) Você consegue definir de quanto em quanto tempo os valores máximos acontecem em sequência? E os mínimos? E entre um mínimo e um máximo?
- c) Você consegue vincular o acontecimento de algum desses valores com as configurações planetárias já estudadas?

Os alunos deverão formular respostas discursivas a essas questões, justificando através dos valores encontrados. O professor solicita, então, a socialização também destes resultados, com a intenção de relacionar os resultados obtidos pelos alunos que escolheram os mesmos planetas e verificar que, não importando o dia inicial escolhido, caso o planeta e o intervalo em que os dados foram obtidos sejam os mesmos, a tendência é que os valores se aproximem e até coincidam.

É nesse momento que o professor deve introduzir a definição de função periódica, baseado nos resultados encontrados pelos alunos e com base no que já foi relatado desenvolver os conceitos de *amplitude*, *frequência*, *período* e *fase*. A definição conceitual seria feita conforme apresentado a seguir:

“O *Período* de uma função pode ser entendido como o intervalo decorrido entre dois pontos mínimos ou dois pontos máximos seguidos da função, isto é, quando há a repetição do “padrão” da função. *Frequência*, que como o nome nos sugere, é o número de períodos que acontecem em um intervalo determinado, que usualmente se define pela razão  $1/T$ , sendo  $T$  o período. Também utilizaremos que a *Amplitude* é a diferença entre o maior e o menor valor da imagem em relação ao ponto médio encontrado na função e, portanto, ela será apresentada como a metade da diferença entre o maior e o menor valor encontrados.”

Neste caso, o professor deve salientar, porém, que por ser um movimento natural e até certo ponto complexo, essa variação de diâmetros não é uma senoide propriamente dita, mas que pode ser encontrada uma função com a qual se consegue evidenciar os mesmos, ou muito próximos, valores de Amplitude, Período, Frequência e Fase.

O professor então introduz a definição de função periódica conforme seção 2.2.1 Funções Periódicas, destacando também que podemos relacionar as funções

periódicas diretamente com o estudo das chamadas senoides. Isso porque muitos dos comportamentos periódicos podem ser modelados através de funções trigonométricas do tipo  $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$  sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  números reais com  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ . De mesmo modo elas também podem ser descritas como  $f(x) = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$ . Ao mesmo tempo em que apresenta essas formas, o professor pode dar indícios do que cada uma das incógnitas faz com o gráfico da função seno/cosseno. Através do aplicativo Geogebra, o professor mostra em etapas o que cada uma das incógnitas envolvidas ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ ) altera no gráfico da função inicial  $f(x) = \text{sen}(x)$ , construindo gráficos onde apenas uma dessas variáveis é alterada. Ao alterar o valor de  $b$ , por exemplo, o professor apresenta aos alunos a modificação visível no gráfico da função, e junto com eles, verifica qual dos conceitos, construídos anteriormente (nesse caso, diretamente a Amplitude), tem seu valor alterado. Essa etapa acima descrita irá desencadear uma pequena série de apresentações em relação à alteração dos valores das incógnitas. É esperado que se verifique que os valores de  $a$  e  $c$ , “movimentam” a função de maneira que, em  $a$  movimenta-se a função em relação ao seu o ponto médio vertical e em  $c$  movimenta-se a função horizontalmente. Quanto ao valor de  $b$ , espera-se verificar que o aumento da Amplitude é diretamente proporcional ao valor inserido e que em  $c$ , a alteração no Período da função é inversamente proporcional ao valor proposto.

Após essa etapa o professor solicita aos alunos que, conforme as funções e definições criadas, iniciem o processo de ajuste das funções para se aproximar dos pontos do gráfico gerado utilizando a ferramenta de adição de gráficos de função no Geogebra.

Nessa etapa o professor deve incentivar que os alunos tentem uma função por vez e que os mesmos utilizem o botão de mostrar/ocultar na janela de visualização do Geogebra para “limpar” a tela antes de uma nova tentativa, sem que a tentativa anterior seja apagada. A finalização da tarefa é definida quando o aluno conseguir fazer uma aproximação de valores de *amplitude*, *período*, *frequência* e *fase* da função inserida com os valores do gráfico gerado através das medições dos diâmetros do planeta.

#### 4.1.5 Avaliação

Como avaliação do processo de ensino-aprendizagem, o professor utilizará os diálogos durante cada uma das etapas, além de verificar quando o aluno aproximar *satisfatoriamente* a curva ajustada com os valores obtidos. Pode também ser solicitado que alunos redijam um relatório desta prática como forma de perceber quais os pontos principais da atividade na perspectiva do aluno e também se houve, e como se deu o processo de aprendizagem significativa.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscando alternativas para o ensino tradicional da disciplina de Matemática, nessa pesquisa foi possível encontrar uma nova maneira de viver o ensino e a aprendizagem de Matemática de um modo geral. Ainda que não tenha experiências suficientes para relatar a efetividade de alguns métodos, o quanto existe a necessidade de dar significados para que o aprendizado seja suficientemente bem compreendido, afinal, sempre estamos em busca de aprender algo para que possa ser utilizado em nossa vida e não algo que simplesmente “preencha o nosso disco rígido”.

Evidenciamos que existem conteúdos os quais a necessidade de abstração é grande e inevitável, porém devemos priorizar durante o ensino básico um estudo mais voltado ao que o aluno pode descobrir no seu mundo, novas maneiras de visualizar a vida e aquilo que o rodeia, aumentando a possibilidade de mobilização por parte dele.

A ideia de utilizar a Astronomia como base para significado de um conteúdo antes visto por muitos apenas como um conteúdo de abstração foi uma porta de entrada, e sem volta, para esse mundo da possibilidade de significação. Ausubel, Novak e Hanesian (1980 p.359) nos relatam que “a motivação é tanto um efeito quanto uma causa da aprendizagem. Assim, não é necessário esperar que se desenvolva a motivação antes de engajar um estudante em atividades de aprendizagem”. Isso significa dizer também, que não basta o professor escolher um tema com o qual muitos dos alunos se identificam e terá uma mobilização maior, pois se não for estruturado de maneira objetiva e clara, não adiantará mascarar um objetivo de aprendizagem com um tema de proximidade do aluno, pois o mesmo continuará desmotivado para tal. É preciso elaborar crítica e construtivamente um processo de aprendizagem para que o aluno se sinta parte dele e engaje seu processo de aprendizagem ativa.

Nessa proposição de desenvolver um estudo sobre a aprendizagem significativa e como ela pode ser apresentada, um mundo de opções se abre quando se está disponível para tal, e percebemos que o professor é parte integrante, mas não central, do processo de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva, desenvolvem-se as mais variadas autonomias, onde o aluno percebe ao decorrer de suas atividades o que ele realmente está aprendendo, além do conteúdo tradicional

e engessado como apresentado outrora, e o professor também consegue desenvolver uma capacidade de diálogo e interação que é evidenciada pela mobilização e a confiança dos alunos no processo como um todo.

A tendência, nessa sala de aula, é a de superar, por um lado, a disciplina policialesca e a figura autoritária do professor que a representa, e, por outro lado, a de ultrapassar o dogmatismo do conteúdo. Não se trata de instalar um regime de anomia (ausência de regras ou leis de convivência) [...]. Trata-se, antes, de criticar, radicalmente, a disciplina policialesca e construir uma disciplina intelectual e regras de convivência, o que permite criar um ambiente fecundo de aprendizagem. (BECKER, 2015, p.25)

Dentro do desenvolvimento deste trabalho, verifica-SE que há diferentes maneiras de se projetar um ensino capaz de preconizar a aprendizagem significativa. Becker (2015 p.40) nos relembra que “os conteúdos devem estar a serviço do aumento da capacidade de aprendizagem (construção de estruturas) e não construir um fim em si mesmos: [...] os conteúdos caducam”. Em nossas conversas e produções, muitas vezes referenciamos e identificamos o processo de ensino como sendo unilateral, não dando a importância devida à aprendizagem e ao aprendiz. Um dos pilares da aprendizagem significativa ativa sob a perspectiva de Ausubel, utilizar o que o aluno já sabe como forma de alicerçar a aprendizagem de algo que se pretende fica claro quando percebemos que é dessa forma que melhor se retém informações que muitas vezes pareciam desconexas com o restante do assunto.

Durante o desenvolvimento do plano de ensino aprendizagem sob influência dessa necessidade de significação, percebemos que é necessário que o professor esteja suficientemente familiarizado com os conceitos que ele quer desenvolver para que assim, de maneira mais objetiva, consiga evidenciar qual será a forma mais adequada para ele apresentá-lo e como são as possíveis formas que o aluno receberá essa informação. Nesse processo um incessante vai-e-vem de conceitos e de significados que precisam ser referenciados e tudo isso faz com que o professor esteja mais disposto a potencializar o que o aluno vai aprender em detrimento do que ele irá ensinar e é essa movimentação que faz com que tanto o aluno quanto o professor evoluam constantemente no processo contínuo da aprendizagem ativa.

## REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional** (trad.). 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- BECKER, Fernando. **A epistemologia do professor: o cotidiano da escola**, 10. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.
- BECKER, Fernando. **Educação e construção do Conhecimento**, 2. ed. Penso, 2015. Livro Eletrônico.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 3 v. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em 28 de Maio de 2019.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática da teoria a prática**. 2. ed. Campinas-SP, Papirus, 1997.
- FRANCISCO. **Diâmetro angular do sol e da lua**. [S.l.], 1 jul. 2017. Disponível em: <<http://francisco-scientiaestpotentia.blogspot.com/2017/07/diametro-angular-do-sol-e-da-lua.html>>. Acesso em: 12 abr. 2019. Blog SCIENTIA EST POTENTIA.
- FARIA (org.), Romildo P. **Fundamentos de astronomia**, 3. ed. Campinas-SP, Papirus, 1987.
- LEONARDO, Fabio M. **Conexões com a matemática**, vol.2, 2. ed. São Paulo, Moderna, 2013.
- MOREIRA, Marco A. **Aprendizagem significativa: um conceito subjacente**. Burgos – Espanha, 1997.
- MOREIRA, Marco A. **Ensino e Aprendizagem: Enfoques teóricos**. 2. ed. São Paulo, Moraes, 1985.
- OLIVEIRA FILHO, Kepler de S.; SARAIVA, Maria de F. **Astronomia e astrofísica**. 2. ed. São Paulo, Livraria da Física, 2000.
- SISTEMA solar – Formação, planetas e corpos celestes. **Cola da Web**. [S.l.,2019?]. Disponível em: <<https://www.coladaweb.com/astrologia/astronomia/o-sistema-solar>> Acesso em 5 abr. 2019.
- STELLARIUM Astronomy Software. **Stellarium v.0.19.0**. [S.l.,2019?]. Disponível em: <<https://www.stellarium.org/pt>> Acesso em 12 abr. 2019.
- VASCONCELLOS, Celso dos S. **Construção do conhecimento em sala de aula**. 11. ed. São Paulo, Libertad, 2000.