



Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em
Computação Aplicada
Mestrado Acadêmico

Henrique Manfron Seffrin

Avaliando o Conhecimento Algébrico do Estudante Através de
Redes Bayesianas Dinâmicas:
Um Estudo de Caso com o Sistema Tutor Inteligente PAT2Math

São Leopoldo, 2015

Henrique Manfron Seffrin

AVALIANDO O CONHECIMENTO ALGÉBRICO DO ESTUDANTE ATRAVÉS DE
REDES BAYESIANAS DINÂMICAS

Um estudo de caso com o Sistema Tutor Inteligente PAT2Math

Dissertação apresentada como requisito parcial
para a obtenção do título de Mestre pelo
Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação
em Computação Aplicada da Universidade do
Vale do Rio dos Sinos — UNISINOS

Orientador:
Prof. Dra. Patricia A. Jaques Maillard

São Leopoldo
2015

S453a

Seffrin, Henrique Manfron.

Avaliando o conhecimento algébrico do estudante através de redes bayesianas dinâmicas : um estudo de caso com o sistema tutor inteligente PAT2Math / Henrique Manfron Seffrin. – 2015.
130 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Computação Aplicada, 2015.

"Orientador: Prof. Dra. Patricia A. Jaques Maillard."

1. Redes bayesianas dinâmicas. 2. Sistemas tutores inteligentes. 3. Modelo de aluno. 4. Álgebra. I. Título.

CDU 004.9

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Bibliotecário: Flávio Nunes – CRB 10/1298)

Henrique Manfron Seffrin

Avaliando o Conhecimento Algébrico do Estudante Através de Redes Bayesianas Dinâmicas
Um Estudo de Caso com o Sistema Tutor Inteligente PAT2Math

Dissertação apresentada à Universidade do Vale do Rio dos Sinos – Unisinos, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Computação Aplicada.

Aprovado em 20 de fevereiro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Patrícia Augustin Jaques Maillard- UNISINOS

Prof. Dr. João Carlos Gluz – UNISINOS

Prof. Dr. Ricardo Azambuja Silveira – UFSC

Prof.^a Dr.^a Patrícia Augustin Jaques Maillard (Orientadora)

Visto e permitida a impressão
São Leopoldo, 19 de Maio de 2015

Prof. Dr. Cristiano André da Costa
Coordenador PPG em Computação Aplicada

Dedico este trabalho a meus familiares,
aos meus colegas de pesquisa,
e a todos que contribuíram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente gostaria de agradecer aos meus pais, Fernando e Eliane, pela oportunidade de poder estudar nesta instituição, e por me apoiarem ao longo deste período.

Agradeço também a minha orientadora Patrícia, por me incentivar a continuar neste caminho ao longo de 3 anos de Iniciação Científica e mais estes 2 anos de Mestrado.

Meu obrigado a todos os professores que participaram das entrevistas e das avaliações, cujas opiniões contribuíram significativamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Também agradeço à escola, cuja parceria com o projeto, permitiu a obtenção de informações vitais para a avaliação deste trabalho, bem como à professora de matemática que cedeu um horário semanal na sua disciplina, o que permitiu aos alunos interagirem com o PAT2Math.

Um agradecimento também, aos meus colegas, e amigos, do projeto PAT2Math e do projeto Antares, que, sem a ajuda deles, a realização deste trabalho não seria possível.

“Os números governam o mundo.”
(Platão)

RESUMO

Pesquisas têm mostrado que os alunos apresentam ganhos mais significativos de aprendizagem através do ensino individualizado, pois o professor pode se focar nas dificuldades de cada um. Por ser uma estratégia de custo elevado, os Sistemas Tutores Inteligentes (STI) oferecem uma alternativa mais viável. Esses sistemas, através de técnicas de Inteligência Artificial, são capazes de se adaptar às características de cada aluno, provendo assistência individualizada. Esta adaptação personalizada é fornecida pelo componente Modelo de Aluno, que é capaz de avaliar e mapear o conhecimento de cada estudante. Na literatura, são encontrados diversos trabalhos que lidam com a questão de avaliação de conhecimento do aluno, dentre os quais encontram-se alguns trabalhos relacionados ao domínio de álgebra. Estes trabalhos, geralmente, apresentam modelagens com redes Bayesianas, que são estruturas probabilísticas amplamente utilizadas por apresentarem resultados muito interessantes no que se refere à avaliação do conhecimento dos estudantes. No entanto, nestes trabalhos, estas estruturas relacionam apenas os conceitos algébricos, ou modelam relações entre operações algébricas, com suas principais propriedades e falsas concepções. Esses trabalhos não buscam definir as relações entre os conceitos algébricos e as respectivas operações, e como os primeiros podem estar interferindo, positivo ou negativamente, na aprendizagem dos segundos. Por exemplo, na álgebra, há conceitos chave, como incógnita e a igualdade entre os lados da equação, que interferem diretamente na compreensão de certas operações algébricas. Se um estudante não os compreende, dificilmente ele será capaz de aplicar corretamente as operações relacionadas em todas as situações. Desse modo, é desejável que os modelos de inferência sejam capazes de identificar se o estudante compreende tais conceitos. Além disso, outra limitação dos trabalhos relacionados de modelos de alunos voltados para a álgebra se refere a como eles tratam as evidências. Como estes trabalhos utilizam os itens de avaliação para isto, a cada novo exercício, é necessário inserir um novo nodo na rede, e estabelecer as relações com cada conceito abordado por este item. Isso torna o projeto da rede trabalhoso e dependente de cada exercício aplicado no STI. Nesse contexto, este trabalho propõe um modelo de aluno algébrico que além de inferir o conhecimento algébrico dos estudantes de conceitos (como incógnita, igualdades, operações inversas), habilidades (operações algébricas) e falsas concepções, busca definir as relações entre conceitos e habilidades. Como foco inicial deste trabalho serão utilizadas as equações de 1º grau. Para a inferência, será empregada a estrutura de Redes Bayesianas Dinâmicas (RBD), usando como evidência a operação aplicada pelo aluno em cada passo da resolução de uma equação. Nesta estrutura de RBD, cada *time slice* corresponde à resolução de um passo, o que torna o modelo proposto independente dos exercícios aplicados pelo STI. Dessa forma, o modelo de inferência proposto pode ser utilizado em qualquer equação algébrica, sem a necessidade de qualquer alteração na rede, como ocorre nos outros trabalhos relacionados. Visando verificar a capacidade de inferência desta rede, foram conduzidas avaliações. A partir dos históricos dos alunos, que utilizaram o PAT2Math, foram obtidas as evidências para a rede; e a partir dos dados dos pós-testes, realizados pelos mesmos alunos, foram obtidos os percentuais a serem comparados com a inferência da rede. Como os resultados não foram satisfatórios, empregou-se a regra do limiar, instanciando toda a variável que o ultrapassasse. Avaliada sob os limiares de 96% e 98%, a rede demonstrou resultados mais precisos com o limiar de 96%, no qual as diferenças entre os resultados da rede e os percentuais dos pós-testes permaneceram, em sua maioria, em até 5%.

Palavras-chave: Redes Bayesianas Dinâmicas. Sistemas Tutores Inteligentes. Modelo de Aluno. Álgebra.

ABSTRACT

Students learn more through personalized instruction, because the teacher can focus on each learner. Being a impracticable strategy in terms of cost, Intelligent Tutoring Systems (ITS) offers a feasible alternative. By using Artificial Intelligence techniques, these systems are able to adapt themselves to the students, providing individualized instruction. Such adaptation is provided by the Student Model, which is able to assess and map the knowledge of each student. In the literature there are several studies that deal with knowledge evaluation in ITS, some of them are related to algebra. These studies present a Bayesian Network modeling, probabilistic structures that are widely used because of their interesting results concerning the evaluation of the student knowledge. However, in this studies, the network structure only models algebraic concepts, or only model a relationship between algebraic operations and its main properties and common misconceptions. These studies do not aim to represent the relationship between concepts and algebraic operations and how the former can be interfering, in a positive or negative way, on the learning of the second one. For example, in algebra, there are key concepts, such as the unknown and equality among sides of the equation, which directly interferes with the understanding of some algebraic operations. If a student does not understand these concepts, he would hardly be able to apply correctly the related operations in every situation. Thus, it is desirable that the inference model be able to identify if the student understands such concepts. In addition, another limitation of the related work of algebraic student models refers to how they deal with the evidence. As these studies use the assessment items for evidence, for each new exercise, it is necessary to insert a new node in the network, and establish relationships with each concept addressed by this item. This makes the network design laborious and dependent on each ITS exercise. In this context, this work proposes an algebraic student model that, in addition to infer the student knowledge of algebraic concepts (as unknown, equality, inverse operation), skills (algebraic operations) and common misconceptions, defines the relationship between concepts and skill. An initial focus of this study will be the 1st degree equations. For the inference model we use the Dynamic Bayesian Networks (DBN), in which the evidences are the operations applied by the student to solve each equation step. In this structure of DBN, each time slice corresponds to a resolution step, which makes the proposed model independent of the ITS exercises. Thus, the proposed inference model can be used in every algebraic equation, without need to make changes in the network, as occurs with other works. In order to verify the inference capacity of the network, evaluations were conducted. From the resolution history of the students, that interact with PAT2Math, the evidences for the network were obtained; and from the post-test data, solved by the same students, the percentages to compare with the results of the network were obtained. As the results aren't very satisfactory, we applied the threshold rule, every variable that exceeded this value are instantiated. The network were evaluated under the threshold of 96% and 98%. The proposed DBN has shown more accurate inference with the 96% threshold, in which the differences between the results of the network and the percentages of the post-test remained mostly with ceiling of 5%.

Keywords: Dynamic Bayesian Networks. Intelligent Tutoring System. Student Model. Algebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Visão interdisciplinar da área de Sistemas Tutores Inteligentes	22
Figura 2:	Passos de resolução em uma equação algébrica de 1º grau	25
Figura 3:	Etapas do <i>inner loop</i> e do <i>outer loop</i>	31
Figura 4:	Arquitetura do Módulo especialista do PAT2Math	34
Figura 5:	Interface do PATequation	35
Figura 6:	Dica apresentada de forma textual, referenciando termos da equação corrente e o agente apontando para estes termos (2 e 3)	36
Figura 7:	Rede Bayesiana do modelo do alarme e suas respectivas tabelas de probabilidades	39
Figura 8:	X está d-separado de Y dado Z	42
Figura 9:	Rede Bayesiana Dinâmica	43
Figura 10:	Rede Bayesiana com generalização de conceitos	46
Figura 11:	Estrutura do Modelo de Aluno	50
Figura 12:	Estruturas principais do modelo	52
Figura 13:	Fragmento da rede sobre Listas Encadeadas.	55
Figura 14:	Rede Bayesiana do Prime Climb	56
Figura 15:	Rede Bayesiana do Prime Climb com o nodo de Fator Comum	57
Figura 16:	Mapa Conceitual de Operações de 1º Grau	68
Figura 17:	Fragmento da rede mostrando uma equação com os seus respectivos passos	69
Figura 18:	Relação temporal entre nodos de Operação e nodos de Passo	70
Figura 19:	Estrutura da segunda rede	71
Figura 20:	Segunda versão do Mapa Conceitual	72
Figura 21:	Terceira versão da estrutura da rede	73
Figura 22:	Versão alterada de acordo com as entrevistas	74
Figura 23:	Exemplos de erros observados pelos entrevistados	75
Figura 24:	Fragmento do questionário aplicado com os professores	78
Figura 25:	Estrutura temporal de 3ª rede	80
Figura 26:	Exemplo de execução da rede proposta	82
Figura 27:	Tempo requerido pela rede X o número de <i>time-slices</i>	84
Figura 28:	Fragmento da rede com exemplos de nodos iniciais	85
Figura 29:	Diferenças entre os dados obtidos com os pós-testes e a rede	93
Figura 30:	Diferenças entre os dados obtidos com os pós-testes e a rede (96% de limiar)	94
Figura 31:	Diferenças entre os dados obtidos com os pós-testes e a rede (98% de limiar)	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	DPC do modelo com <i>noisy-or</i>	41
Tabela 2:	Probabilidades condicionais para o nodo <i>Item</i> , considerando uma relação entre um nodo <i>Feature</i> e um nodo <i>Misconception</i>	54
Tabela 3:	Tabela comparativa entre os trabalhos relacionados e o trabalho proposto . .	62
Tabela 4:	Probabilidades obtidas com as entrevistas	86
Tabela 5:	Exemplo de tupla do arquivo CSV	90
Tabela 6:	Médias das diferenças	92
Tabela 7:	Médias das diferenças para os limiares de 96% e 98%	94
Tabela 8:	Total de operações aplicadas durante o uso do PAT2Math pelos estudantes .	96
Tabela 9:	Resultados do Teste de Equivalência para a versão sem limiares	97
Tabela 10:	Resultados do Teste de Equivalência para a versão com 96% de limiar	97
Tabela 11:	Resultados do Teste de Equivalência para a versão com 98% de limiar	98

LISTA DE SIGLAS

4oP	4 Operações Fundamentais
AD	Adição
AF	Adição e Subtração e Frações
AS	Propriedade Associativa
CAI	Computer Aided Instruction
CM	Propriedade Comutativa
CoN	Constante
DF	Divisão de Frações
DM	Propriedade Distributiva
GUI	Graphical User Interface
IA	Inteligência Artificial
ICAI	Intelligent Computer Aided Instruction
IG	Igualdade dos termos da equação
InC	Incógnita
MA	Modelo de Aluno
MF	Multiplicação de Frações
MM	Mínimo Múltiplo Comum
MMC	Mínimo Múltiplo Comum
MT	Multiplicação
OI	Operação Inversa
PA	Princípio Aditivo
PAT2Math	Personal Affective Tutor to Math
PM	Princípio Multiplicativo
RB	Rede Bayesiana
RBD	Rede Bayesiana Dinâmica
SA	Step Analyzer
SeP	Separar inteiros de Incógnitas
SG	Step Generator
SiN	Sinal Negativo
STI	Sistema Tutor Inteligente
ZPD	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Problema	15
1.2	Objetivos	17
1.3	Metodologia	18
1.4	Organização do documento	19
2	SISTEMAS Tutores INTELIGENTES	21
2.1	Visão Geral	21
2.2	Arquitetura	23
2.2.1	Base de Domínio	23
2.2.2	Modelo do Aluno	25
2.2.3	Tutor	26
2.2.4	Componente de Comunicação	29
2.3	Funcionamento	30
2.3.1	<i>Inner loop</i>	31
2.3.2	<i>Outer loop</i>	32
2.4	PAT2Math	32
3	REDES BAYESIANAS	37
3.1	Visão Geral	37
3.1.1	Teorema de Bayes	37
3.2	Estrutura	38
3.3	Inferência	40
3.3.1	D-Separação	41
3.4	Redes Bayesianas Dinâmicas	42
4	MODELOS DE ALUNO E AVALIAÇÃO DO CONHECIMENTO	44
4.1	O fenômeno de <i>degeneracy</i>	47
5	TRABALHOS RELACIONADOS	48
5.1	<i>Knowledge Tracing</i>	48
5.2	Redes Bayesianas Aplicadas à avaliação de conhecimento	49
5.2.1	Álgebra	49
5.2.2	Álgebra e Falsas Concepções	51
5.2.3	Programação	54
5.2.4	Matemática	55
5.3	Pré-Requisitos a um Modelo de Aluno	57
5.4	Análise dos Trabalhos Relacionados	59
6	TRABALHO DESENVOLVIDO	63
6.1	Etapas de desenvolvimento do trabalho	64
6.1.1	A primeira rede - Experimentos iniciais	67
6.1.2	A segunda rede - A generalização	70
6.1.3	A terceira rede - Versão Final	71
6.1.4	Funcionamento da Rede	81
6.1.5	Interação com o Sistema Tutor	82
6.1.6	Limitações da Rede	83

6.2 Coleta de Dados	85
6.2.1 Entrevistas	85
7 AVALIAÇÃO	87
7.1 Registro do log de interações	87
7.2 Avaliação da Rede	90
7.2.1 Teste estatístico de equivalência entre os resultados da rede e do pós-teste	95
7.2.2 Considerações gerais sobre a avaliação	98
7.3 Conclusões sobre a avaliação	99
8 CONCLUSÃO	101
REFERÊNCIAS	104
APÊNDICE A ARTIGOS PUBLICADOS	109
APÊNDICE B QUESTIONÁRIO UTILIZADO NA OBTENÇÃO DAS PROBABILIDADES DA REDE	111
APÊNDICE C REDE COMPLETA	118
APÊNDICE D PÓS-TESTES APLICADOS NAS TURMAS DE 7ª SÉRIE	120
APÊNDICE E RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DO PÓS-TESTE	122
APÊNDICE F RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DA REDE	124
APÊNDICE G RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DA REDE COM LIMIARES	126
APÊNDICE H RESULTADOS DOS TESTES DE EQUIVALÊNCIA PARA A REDE SEM LIMIARES	129
APÊNDICE I RESULTADO DOS TESTES DE EQUIVALÊNCIA PARA AS REDES COM LIMIARES	130

1 INTRODUÇÃO

Uma grande parcela de estudantes do ensino básico apresentam baixos níveis de proficiência em Matemática e, em especial, em Álgebra (CARPENTER et al., 1982; EDUCATION, 1983). Esta realidade também é observada no Brasil, conforme mostram dados dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000). Uma possível explicação para esse fato é que a Álgebra introduz novos conceitos, mais abstratos, que diferem dos cálculos aritméticos abordados até então nas escolas. A Aritmética visa à aplicação das operações matemáticas, de modo a obter o resultado de uma expressão. Na Álgebra, esse resultado já é apresentado; o estudante deve, então, descobrir o valor de um número desconhecido, a incógnita. Contudo, ao mesmo tempo, esse valor desconhecido também deve ser tratado como um número durante a aplicação das operações matemáticas, como adição, subtração, multiplicação e divisão.

Esse cenário de baixo rendimento escolar em Matemática e, em especial, em Álgebra, tem incentivado escolas, professores e órgãos governamentais a buscarem soluções a fim de melhorar os índices dos estudantes (BRASIL, 2000). O ensino particular mostra-se como uma alternativa efetiva. Segundo Bloom (1984), os aprendizes que receberam ensino individualizado (*one to one tutoring*) tiveram, em média, um desempenho na ordem de dois sigmas (desvio-padrão), melhor do que o dos alunos que receberam instrução convencional (um professor para uma sala de aula). Isso ocorre porque, nesse tipo de ensino, o professor está focado em um aluno apenas. Desse modo, a sua forma de ensino será adaptada a esse único aprendiz. No entanto, apesar de efetiva, é uma técnica inviável devido ao seu alto custo de implementação.

Os Sistemas Tutores Inteligentes (STI) oferecem uma alternativa viável a essa questão. De fato, alguns estudos recentes, envolvendo meta-análise, têm mostrado que STIs podem ser tão efetivos quanto um professor particular (MA et al., 2014; STEENBERGEN-HU; COOPER, 2013, 2014). Esses softwares educacionais utilizam técnicas de inteligência artificial para prover o estudante de um ambiente similar ao *one to one tutoring*. Isso é possível, porque eles são capazes de mapear o conhecimento de cada aluno e, dessa forma, adaptar a assistência e a instrução dadas de acordo com o seu conhecimento.

O componente do STI responsável por inferir o conhecimento do aluno é o Modelo de Aluno. Ele é composto por uma base de dados, que armazena todas as informações referentes a cada aluno, como perfil, conhecimento e características afetivas; e um componente que é capaz de avaliar o conhecimento deste aprendiz. Essa avaliação, também chamada de diagnóstico, ocorre durante a resolução dos exercícios propostos ao aluno pelo sistema, uma vez que a resposta dos exercícios é uma das únicas evidências de conhecimento que o STI é capaz de obter do aluno (VANLEHN, 2006). Quanto mais detalhadas forem essas evidências, mais adaptativo o tutor torna-se e, por isso, mais efetivo. Os STIs do tipo *step-based* apresentam resultados ainda mais promissores do que outros tipos de tutores (VANLEHN, 2011). Esses tutores permitem que o estudante resolva os problemas passo-a-passo e fornecem assistência para cada etapa, informando se o passo está correto e fornecendo dicas, quando necessário.

O PAT2Math (*Personal Affective Tutor to Math*) é um *step-based* STI que prove assistência individualizada para estudantes, enquanto estiverem resolvendo, passo-a-passo, equações algébricas de 1º e 2º graus com uma incógnita. Para tanto, ele possui um módulo especialista capaz de resolver qualquer equação de 1º ou 2º grau (JAQUES et al., 2013). Esse sistema especialista realiza a correção de cada etapa de uma equação que foi resolvida pelo aluno no componente de resolução de equações (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2011). Esse componente de resolução é implementado através de tecnologias da web, como HTML 5 e CSS 3, permitindo uma maior portabilidade ao sistema (MORAIS; JAQUES, 2013). O sistema também conta com um agente pedagógico animado para interagir com o aluno. Ele é capaz de prover dicas que o auxiliam a resolver uma etapa da equação e fornece *errors feedbacks* que o ajudam a corrigir o seu erro. Mais recentemente, esse agente ganhou a capacidade de interagir com as equações, destacando termos que são apresentados nas dicas (MARTINS, 2013).

1.1 Problema

Possuir uma capacidade adaptativa é o que diferencia os STIs dos demais softwares educacionais não inteligentes. Essa capacidade permite aos STIs selecionarem explicações e exercícios de acordo com as características de cada aluno. No entanto, para que um STI seja de fato adaptativo, ele deve possuir meios de avaliar o conhecimento do estudante. O grande desafio é definir como avaliar esse conhecimento, uma vez que o diagnóstico do conhecimento do aluno é dependente do domínio. Essa dependência deve-se ao fato de que cada área de conhecimento possui uma estruturação própria, com seus próprios termos, definições e relações conceituais. Cada unidade de conhecimento possui relações com as demais, exercendo influências em maior ou menor escala. O desafio está em definir essa estrutura e a importância de cada relação.

Na Álgebra, essa estrutura de relações é bem observada. As operações algébricas estabelecem relações umas com as outras, de diversos tipos, tais como relações de precedência e de composição. A relação de precedência define o que deve ser aprendido primeiramente para que o estudante possa compreender a operação seguinte. A relação de composição determina que uma operação é resolvida mediante a aplicação de um conjunto de outras operações. Essas relações podem ser observadas na operação de soma de frações, que necessita primeiramente da obtenção do valor do mínimo múltiplo comum (MMC), em seguida da divisão deste MMC pelo denominador da fração e, finalmente, da multiplicação deste resultado pelo numerador desta mesma fração. Também é observada em todas as operações com fração, que exigem o conhecimento prévio das quatro operações fundamentais.

Na literatura, encontram-se diversos trabalhos referentes à avaliação de conhecimento, entre os quais, encontram-se as pesquisas relacionadas à Álgebra. Esses trabalhos modelam de diversas formas o conhecimento algébrico, utilizando, geralmente, redes Bayesianas. As redes são amplamente empregadas para diagnóstico do conhecimento do aprendiz, pois são capazes de realizar inferências sobre dados incertos. Quanto à sua estrutura, permitem organizar o co-

nhecimento de uma forma muito similar aos mapas conceituais, os quais permitem indicar a relação entre cada tópico de conhecimento e estabelecer relações de dependência entre eles. Essas redes também permitem definir o nível de influência de cada tópico sobre o seu sucessor.

Quanto à estrutura das suas redes Bayesianas, os trabalhos que empregam redes Bayesianas para diagnóstico do conhecimento do estudante ora modelam apenas as relações entre conceitos algébricos (MILLÁN et al., 2013), ora relacionam unicamente as operações com as suas principais propriedades e falsas concepções (DUIJNHOVEN, 2003). Como na álgebra a compreensão dos conceitos base interfere diretamente na aplicação de cada operação, é desejável um modelo que seja capaz de mostrar quais os conceitos que um estudante compreende e quais ele ainda não compreendeu. Isso permite entender melhor os possíveis déficits conceituais que prejudicam a aprendizagem das operações algébricas, assim como melhorar a inferência do conhecimento do estudante tanto em relação aos conceitos quanto às operações, já que a compreensão dessas últimas depende do correto entendimento das primeiras.

Dessa forma, o desafio deste trabalho está em implementar este componente de avaliação para o domínio de álgebra elementar, empregando uma estrutura de rede Bayesiana Dinâmica que estabeleça relações entre conceitos, operações e falsas concepções. Uma falsa concepção indica que o aluno conhece certos conceitos, mas os utiliza em situações impróprias (MATZ, 1982). Para realizar esse mapeamento, essa estrutura irá utilizar como evidência os passos resolvidos pelo aluno durante um exercício, mais especificamente a operação aplicada em um passo, bem como as falsas concepções identificadas pelo modelo cognitivo.

A escolha das redes Bayesianas Dinâmicas baseia-se na ideia de uma estrutura que seja independente de problema¹. Trabalhos como os de (MILLÁN et al., 2013; DUIJNHOVEN, 2003; NOUH; KARTHIKEYANI; NADARAJAN, 2006) apresentam estruturas Bayesianas não dinâmicas. Suas evidências são o desempenho dos alunos nos exercícios (problemas): se eles foram resolvidos, ou não, corretamente. Porém, se um novo exercício for inserido, a rede deve ser modificada para comportá-lo. Tornar a rede independente de problemas é importante, pois STI adaptativos precisam de um grande número de problemas para adaptar os exercícios ao conhecimento do estudante.

Para uma estrutura ser independente de exercício, ela deve utilizar evidências que sejam comuns a todos os exercícios desse gênero. Na Álgebra, toda a equação é resolvida a partir de um subconjunto finito de operações. Portanto, para este trabalho, a rede irá utilizar como evidência os elementos comuns a todas as equações: as operações algébricas e as principais falsas concepções observadas nos passos resolvidos pelos estudantes. Essas informações de evidências podem ser providas pelo próprio STI, através do seu módulo especialista. Geralmente, o sistema especialista de um STI é capaz de identificar que operações o estudante utilizou para resolver um passo da equação, assim como identificar as principais falsas concepções desses

¹Neste trabalho, os termos exercícios e problemas são empregados como sinônimos no contexto de STI. Eles representam desafios para o aluno resolver empregando o conhecimento aprendido. No domínio de álgebra, esses problemas podem ser enunciados de problemas, *word problems*, ou equações para o aluno resolver. O trabalho proposto lida essencialmente com resolução de equações.

alunos.

Como uma operação pode ser aplicada repetidas vezes, é necessário que essa informação seja armazenada na rede. Como não é desejável que a estrutura da rede seja alterada a cada equação, optou-se pela estrutura das redes Bayesianas Dinâmicas. Essa estrutura já é utilizada pela técnica do *Knowledge Tracing*, conforme mostra (REYE, 2004). Através dessa estrutura, cada *time-slice* representa a aplicação de uma operação para resolver um passo de uma equação. Devido à sua característica dinâmica, diferentes tipos de equações podem ser utilizadas, pois o número de operações necessárias para resolvê-las será igual ao número de *time-slices* da rede.

1.2 Objetivos

Considerando o contexto acima descrito, este trabalho busca verificar a seguinte **hipótese de pesquisa**: “A representação explícita da relação entre conhecimento declarativo (conceitos algébricos), procedural (habilidades, tais como aplicar operações algébricas) e falsas concepções, em um mecanismo de inferência probabilística como as redes Bayesianas Dinâmicas, pode contribuir para uma melhor inferência do conhecimento do estudante?”.

Mais precisamente, deseja-se verificar se os conceitos algébricos auxiliam na identificação das habilidades e se permitem identificar as possíveis dificuldades que o estudante venha a apresentar, durante a resolução de uma etapa de um exercício. Por exemplo, o estudante consegue aplicar perfeitamente a operação de multiplicação em números inteiros, mas apresenta dificuldades em multiplicações com incógnitas. Tal dificuldade não está relacionada diretamente à operação de multiplicação, mas sim ao conceito de incógnita, a noção de que ela representa um valor numérico e, portanto, pode ser multiplicada.

Dessa forma, este trabalho tem como **objetivo principal** melhorar a inferência do conhecimento algébrico do estudante através da representação explícita da relação entre conceitos algébricos, operações algébricas e falsas concepções, em uma rede Bayesiana Dinâmica. Este modelo visa a avaliar tanto a correta aplicação das operações quanto a compreensão dos principais conceitos algébricos, assim como identificar as falsas concepções.

Por utilizar essas informações relativas ao domínio do STI, como operações algébricas, conceitos e falsas concepções, este modelo de inferência é dependente do domínio algébrico

Destacam-se os seguintes **objetivos específicos** deste trabalho:

- Verificar se esta representação do conhecimento algébrico, através da relação entre conceitos, operações e falsas concepções, apresenta uma melhor inferência de conhecimento em relação a uma modelagem que utiliza apenas operações algébricas.
- Tornar a estrutura da rede independente de exercício, ou seja, a mesma estrutura deve ser empregada em cada tipo de equação resolvida pelo aluno, sem a necessidade de reestruturá-la para cada novo exercício. É observado que, nos trabalhos relacionados, são utilizadas redes que utilizam os itens de avaliação como evidências para a rede. No

entanto, caso seja necessário incluir novos itens, ou exercícios, ao sistema, a rede deve ser modificada para receber esse novo item, o que não é desejável para o PAT2Math. Isso porque ele possui um número considerável de equações de 1º grau e seria inviável construir um nodo para cada um deles. Além disso, estratégias de seleção de problemas mais adaptativas, como o *macroadaptation* e o *mastery learning*, conforme descritas na seção 2.3.2, precisam de uma grande quantidade de exercícios para serem implementadas.

De modo a atingir tais objetivos, é utilizado como estudo de caso o STI PAT2Math, que é um STI do domínio algébrico e que, atualmente, não possui um componente de inferência. Apesar deste modelo de inferência ser dependente do domínio da álgebra, devido à necessidade de estruturar este conhecimento algébrico para realizar esta inferência, este modelo pode ser empregado em qualquer outro *step-based tutor* voltado ao domínio algébrico, desde que disponha de um sistema especialista (ou outro componente inteligente) capaz de identificar as unidades de conhecimento empregadas na resolução de etapas das tarefas.

1.3 Metodologia

De modo a atingir os objetivos propostos, o desenvolvimento deste trabalho envolveu diversas etapas descritas nesta seção. Inicialmente, realizou-se uma revisão bibliográfica referente a modelos de aluno em Sistemas Tutores Inteligentes. Posteriormente, o estudo focou-se em Redes Bayesianas e Redes Bayesianas Dinâmicas, que são as técnicas mais utilizadas para inferência do conhecimento do estudante.

Com base nas informações obtidas e com o auxílio de uma especialista, professora de matemática do ensino fundamental, elaborou-se um mapa conceitual para o domínio algébrico. A partir desse mapa, elaborou-se uma primeira versão do componente proposto, uma rede Bayesiana relacionando as operações de 1º grau da álgebra. Essa rede é identificada neste trabalho como Rede I.

A Rede I foi, então, avaliada para verificar a sua capacidade de inferência. Desse modo, foram selecionadas cinco equações que foram decompostas em seus passos de resolução, ou seja, as operações necessárias para resolver cada equação. Para cada passo, foi inserido um novo nodo na Rede I. A avaliação consistiu em verificar quais passos foram aplicados (in)corretamente, sendo tais informações as evidências da rede. O resultado da inferência foi comparado com a opinião da especialista.

Visando a uma generalização para essa rede, ou seja, estendê-la de modo que opere com qualquer equação de 1º grau, foi convertida em uma Rede Bayesiana Dinâmica. Novamente, realizou-se uma avaliação utilizando-se os mesmos dados da Rede I. A Rede II apresentou resultados inferiores à Rede I, devido à sua característica dinâmica.

Buscando aprimorar a inferência da Rede II, foram realizadas entrevistas com professores de matemática. Tais entrevistas visaram a verificar a estrutura da segunda rede e o grau de influência entre as operações de 1º grau. Com base nas informações obtidas nas entrevistas, a Rede

II foi reestruturada de modo a incluir os conceitos algébricos e as principais falsas concepções observadas nos estudantes, assim como as relações deles com as operações algébricas.

Essa reestruturação deu origem à Rede III, que agrega e relaciona operações, conceitos e falsas concepções. Novas entrevistas com professores de matemática foram conduzidas para validar essa nova estrutura e levantar as suas probabilidades condicionais.

Para avaliar a Rede III, coletou-se dados da interação com o STI PAT2Math de alunos de duas turmas de uma escola particular do Vale do Rio dos Sinos. Esses dados são provenientes do uso do PAT2Math pelos alunos, durante dois meses, uma vez por semana (sessões de 50 minutos). Cada resposta submetida pelos estudantes foi organizada em registros, os quais também armazenaram as operações inferidas pelo componente especialista do PAT2Math. Tais dados foram entrados como evidências à Rede III, simulando uma integração da rede com o STI, permitindo a ela inferir o conhecimento de cada estudante. Os resultados da rede correspondem ao grau de conhecimento do estudante, valor entre 0 e 100%, para cada conceito e operação algébrica representada na rede.

Ao final do período de dois meses, os alunos que utilizaram o PAT2Math também resolveram um pós-teste em papel e caneta. Esses pós-testes foram corrigidos e analisados, o que permitiu obter o percentual de acerto de cada aluno para cada operação. Os dados utilizados na interação com o STI foram inseridos como evidência na rede. Ao final da simulação, os resultados finais da rede, localizados nos nodos que representam cada operação de 1º grau, foram comparados com os percentuais calculados dos pós-testes. A avaliação consistiu em comparar o quão próximo a rede chegava dos resultados dos pós-testes dos alunos.

1.4 Organização do documento

Este documento está organizado em capítulos, em cada qual é tratado um assunto específico, necessário para a compreensão global deste trabalho. A organização de cada capítulo é descrita a seguir.

O capítulo 2 introduz os Sistemas Tutores Inteligentes. São apresentados conceitos utilizados ao longo desta dissertação, relacionados aos STIs. Também é apresentada a arquitetura básica de um STI, em que os seus principais componentes são destacados. O seu processo de funcionamento é organizado em duas etapas, que são explicadas individualmente. Por fim, o STI PAT2Math é apresentado e seus principais componentes e funcionalidades são descritos.

No capítulo 3, são apresentadas as Redes Bayesianas, juntamente com as Redes Bayesianas Dinâmicas, um tipo particular da primeira. A arquitetura dessas redes, bem como os seus principais componentes, são destacados. Finalizando o capítulo, é descrito como ocorre o processo de inferência nessas estruturas de dados, que são as peças-chave para o desenvolvimento deste trabalho.

Já no capítulo 4, o componente Modelo de Aluno é explorado mais profundamente. São apresentadas as suas principais classificações, bem como é descrito como alguns autores mode-

laram os seus componentes de avaliação. Por fim, é discutido o *degeneracy*, que é um fenômeno que pode interferir no correto funcionamento dos Modelos de Aluno.

As soluções apresentadas no capítulo 4 são melhor exploradas no capítulo 5, que apresenta os trabalhos relacionados. Ao seu final, uma comparação é realizada com o trabalho proposto e o principal diferencial é destacado.

No capítulo 6, é descrito o desenvolvimento da rede, bem como todas as versões desenvolvidas que a antecederam. Também são descritas as coletas de informações necessárias para o funcionamento da rede.

A avaliação da rede é relatada no capítulo 7, bem como a obtenção de dados necessários a sua realização. Finalmente, no capítulo 8, são apresentadas as principais conclusões, os resultados e os trabalhos futuros.

2 SISTEMAS TUTORES INTELIGENTES

Este capítulo introduz alguns conceitos sobre Sistemas Tutores Inteligentes e sobre o projeto PAT2Math, ao qual este trabalho está relacionado. A seção 2.1 fornece uma breve conceituação sobre Sistemas Tutores. Na seção 2.2, os principais componentes presentes na arquitetura de um Sistema Tutor, bem como as suas funcionalidades, são descritos. As principais atividades realizadas durante a interação do aluno com um sistema tutor são descritas na seção 2.3. Finalizando, na seção 2.4, o sistema do projeto PAT2Math é apresentado.

2.1 Visão Geral

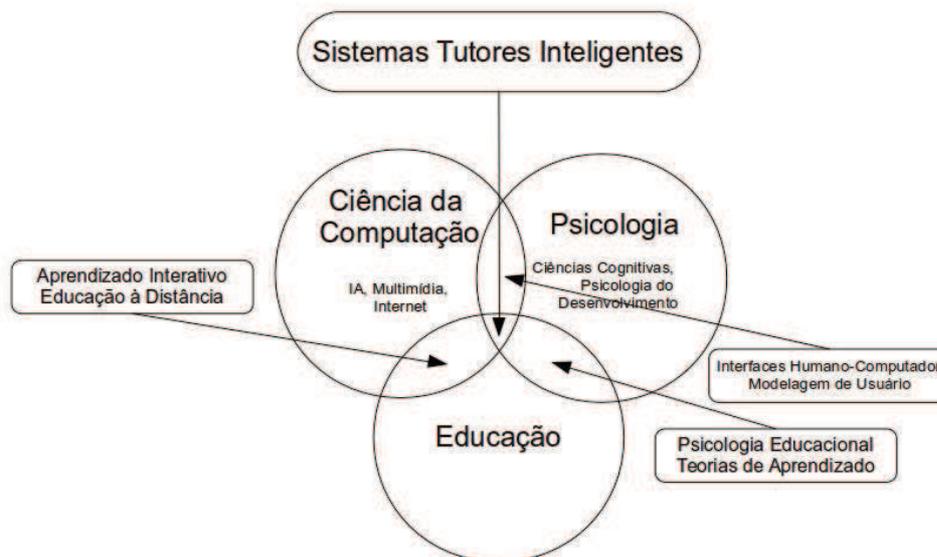
Sistemas Tutores Inteligentes (STIs) são sistemas inteligentes voltados para o ensino de conteúdos, em áreas específicas de conhecimento. Sua principal característica é o domínio do conteúdo ensinado, ou seja, possuem conhecimento suficiente para resolver os mesmos exercícios que propõem aos alunos. Isso porque uma vez que o sistema conhece as etapas envolvidas no processo de resolução desse exercício, ele é capaz de prover uma correção de cada passo resolvido, fornecendo textos explicativos para auxiliar o aluno, se necessário (WOOLF, 2008). Também permite ao sistema demonstrar ao estudante como proceder na resolução de um passo, ou prover dicas de como resolvê-lo (VANLEHN, 2006). Para tanto, os STIs geralmente utilizam um sistema especialista para representar o conhecimento do domínio.

Durante a interação com o aluno, os STIs são capazes de mapear as características de cada estudante. Tais características incluem: (i) os conceitos aprendidos por ele, ou seja, suas habilidades; (ii) o estilo de aprendizagem deste aluno, se ele prefere que o conteúdo seja apresentado em forma de texto ou em forma de vídeo; (iii) os seus estados afetivos (JQUES et al., 2011), entre outros. STIs inferem o conhecimento e outras características dos alunos através de técnicas matemáticas como cálculos de probabilidade (CORBETT; ANDERSON, 1994) ou utilizando recursos da Inteligência Artificial como as redes Bayesianas (MANSKE; CONATI, 2005). Tal inferência, também chamada de diagnóstico, é realizada pelo componente Modelo de Aluno. Na seção 4, esse componente é explorado mais detalhadamente.

Utilizando as informações das características do estudante e as informações do domínio, juntamente com estratégias pedagógicas, o tutor seleciona o conjunto de materiais instrucionais mais adequados para cada aluno, conseqüentemente, tornando-o adaptável a cada tipo de aluno. Materiais instrucionais compreendem todo texto, vídeo ou exercício relacionado ao domínio do sistema. Por exemplo, em um domínio algébrico, tais materiais compreendem equações para o aluno resolver; textos sobre incógnitas, igualdade, operações inversas, etc.; vídeos demonstrando como aplicar determinada operação.

Sendo o STI um software complexo, é natural que o seu desenvolvimento também o seja. Esse é um processo que envolve não apenas a área tecnológica como a Ciência da Computação, mas também áreas como a Psicologia e a Educação (WOOLF, 2008). A Ciência da Computa-

Figura 1: Visão interdisciplinar da área de Sistemas Tutores Inteligentes



Fonte: Traduzido de (WOOLF, 2008)

ção provê todo o suporte tecnológico para dar forma ao sistema: a IA para lidar com questões como o conhecimento do sistema e do aluno, a internet para prover a mobilidade do sistema, os recursos multimídia para tornar o ensino mais dinâmico. A Psicologia, através das Ciências Cognitivas, preocupa-se com questões relativas a como o ser humano pensa e aprende: como aquele aluno, que está interagindo com o sistema, aprende, que informações ele está assimilando; os seus estados emocionais, de que forma eles interferem no seu aprendizado, seja positiva ou negativamente; como detectar esses estados emocionais, seja por voz, expressões faciais, comportamento do aluno durante a interação com o sistema ou por sinais fisiológicos (JAQUES et al., 2011).

A Educação, por sua vez, oferece todo o suporte de domínio ao sistema, bem como questões referentes ao ensino, tais como: (i) definição de currículos: os conteúdos a serem ensinados e a sua organização; (ii) metodologias de ensino: qual o melhor meio de introduzir certos conceitos, qual a melhor forma de auxiliar o aluno quando apresenta alguma dificuldade; (iii) avaliação: como avaliar determinado conhecimento, como determinar se um conhecimento foi assimilado pelos alunos; e (iv) motivação: como tornar um conteúdo mais interessante para os alunos. Dessa forma, ao se desenvolver um STI, deve-se ter em mente que ele é um processo interdisciplinar, envolvendo cada uma dessas três disciplinas. A Figura 1 ilustra esse conceito de interdisciplinaridade de um STI.

Através do conhecimento do domínio e das habilidades de cada aluno, os STIs buscam oferecer um ambiente similar ao que é provido pelo modo *one to one tutoring*. Neste modo de ensino, um professor ensina um único aluno, utilizando a técnica do *mastery learning*, na qual as atividades são focadas em resolver as dificuldades apresentadas pelo aluno. O estudo somente prosseguirá quando as dificuldades forem resolvidas. Essa técnica de ensino indivi-

dual é conhecida por produzir bons ganhos de aprendizado (dois desvios padrão melhor que em relação ao ensino tradicional) (BLOOM, 1984). No entanto, essa técnica torna-se inviável por ser um processo “muito caro para a maioria das sociedades suportarem em grande escala” (BLOOM, 1984). Dessa forma, os STIs tornam-se uma alternativa viável.

Estudos (KOEDINGER et al., 1997; NICAUD et al., 2006) mostram que, de fato, o uso de STIs contribuem positivamente para o aprendizado dos alunos. Em (KOEDINGER et al., 1997), um experimento foi conduzido em larga escala com 470 alunos de escolas na cidade de Pittsburgh. Os resultados do experimento mostraram que o grupo de alunos que utilizou o STI obteve uma melhora significativa em relação ao grupo que não utilizou (1 desvio padrão), demonstrando a eficácia do tutor.

Os experimentos descritos em (NICAUD et al., 2006) foram realizados em quatro países, Itália, Brasil, Índia e França, utilizando o software Aplusix, uma ferramenta para resolução de equações algébricas. Esses experimentos visaram a verificar se a ferramenta contribuía positivamente para o aprendizado de álgebra (Itália e Brasil), se a colaboração entre os alunos apresentava resultados positivos (Índia) e a viabilidade da utilização do software em sala de aula (França). Os resultados foram positivos em questão de ganho de aprendizado, tanto individual quanto colaborativo. No que se refere ao uso em sala de aula, ele mostrou-se eficiente. Também foi observado que os alunos não hesitaram em testar novas estratégias. O software permitiu que os professores se concentrassem nos alunos com maiores dificuldades.

Além desses, alguns estudos recentes, envolvendo meta-análise, tem mostrado que STIs podem ser tão efetivos quanto um professor particular (MA et al., 2014; STEENBERGEN-HU; COOPER, 2013, 2014). Em especial, os tutores do tipo *step-based*, que assistem os estudantes na resolução passo-a-passo de equações, mostraram-se ainda mais efetivos (VANLEHN, 2011).

2.2 Arquitetura

Trabalhos na área de STIs descrevem a arquitetura básica de um STI (BURNS; CAPPS, 1988; WOOLF, 2008) como composta essencialmente por uma Base de Domínio, um Modelo de Aluno, um componente Tutor e um módulo de comunicação com o usuário. Nas subseções a seguir, cada componente é descrito.

2.2.1 Base de Domínio

A Base de Domínio é o componente responsável pela estruturação e pelo armazenamento do conhecimento do domínio do sistema. Domínio é um termo que se refere a uma área de estudo do sistema, por exemplo, introdução à física ou ao ensino de geometria. O objetivo do STI é ensinar ao aluno uma parte desse domínio (WOOLF, 2008), ou seja, transmitir conhecimento a ele. Isso exige que esse conhecimento seja compreensível por parte do sistema, para que ele seja capaz de prover explicações ao aluno.

Representação de conhecimento é uma etapa fundamental no desenvolvimento de STIs e é essencial para a IA, que visa a estruturar um conhecimento do mundo real de modo que ele seja compreensível por um sistema computacional, permitindo a ele realizar inferências (DAVIS; SHROBE; SZOLOVITS, 1993), e apresentar conclusões, simulando um certo tipo de inteligência (WOOLF, 2008).

Conforme (DAVIS; SHROBE; SZOLOVITS, 1993), toda a representação de conhecimento não é precisa, uma vez que o modelo deve ser simplificado de modo a reduzir a sua complexidade, removendo informações desnecessárias. De fato, uma representação totalmente fiel do conhecimento beira ao impossível (DAVIS; SHROBE; SZOLOVITS, 1993). Por exemplo, ao definir um domínio de álgebra elementar para turmas de 8º e 9º anos, especificamente equações de 1º e 2º graus, não é interessante incluir nele conteúdos mais avançados como: raízes cúbicas, números complexos e equações exponenciais. Isso porque tais conteúdos, embora possam ser aplicados em equações algébricas, não são o foco principal desse domínio que é apenas equações de 1º e 2º graus.

No que diz respeito ao conhecimento em si, ele é classificado em duas categorias: o procedural e o declarativo (BURNS; CAPPS, 1988). O **conhecimento procedural** é o conhecimento que é aplicado na resolução de tarefas (BURNS; CAPPS, 1988); somente pode ser adquirido através do conhecimento declarativo, ou seja, é o conhecimento declarativo aplicado na resolução de tarefas (ANDERSON et al., 1990). Este conhecimento está muito bem representado na literatura através dos sistemas de produção, os sistemas especialistas.

Como exemplo de aplicação de conhecimento procedural em STIs, a teoria ACT* de (ANDERSON et al., 1990) codifica cada habilidade cognitiva do aluno em um conjunto de regras de produção (se <condição> então <ação>). O termo habilidade cognitiva refere-se ao conhecimento obtido durante o estudo, seja ele procedural (como resolver), ou declarativo (conceitos por trás deste procedimento).

O **conhecimento declarativo**, ao contrário do procedural, não é aplicado a um uso específico (BURNS; CAPPS, 1988). Ele se refere a todo conhecimento que é assimilado na memória dos seres humanos; essa assimilação ocorre por meio de leituras, discussões, estudos, etc. (ANDERSON et al., 1990). STIs aplicam este tipo conhecimento nos materiais apresentados aos alunos. Isso permite ao aluno compreender melhor o domínio, bem como resolver tarefas específicas. Para a representação do conhecimento declarativo são empregados, geralmente, redes semânticas, *schemas*, *frames*, regras e ontologias (ANDERSON, 1988).

O STI fará uso desses conhecimentos para auxiliar o aluno, seja corrigindo os exercícios, provendo assistência ao aluno (textual ou em vídeo), ou disponibilizando outros materiais instrucionais. Através do conhecimento procedural, o sistema é capaz de verificar se os exercícios desenvolvidos estão corretos, seja em uma etapa da resolução ou em seu resultado final. Isso é possível porque o conhecimento procedural descreve todas as etapas envolvidas na resolução da tarefa. Uma resolução por etapas é mais desejável, pois, através dela, o sistema é capaz de melhor identificar as habilidades utilizadas pelo aluno na sua resolução. Embora seja perfeita-

Figura 2: Passos de resolução em uma equação algébrica de 1º grau

$5x + 15 = 80$	(Passo 1 - Operação Inversa - Adição)
$5x = 80 - 15$	(Passo 2 - Subtração)
$5x = 65$	(Passo 3 - Operação Inversa - Multiplicação)
$x = \frac{65}{5}$	(Passo 4 - Divisão)
$x = 13$	(Passo 5 - Resultado)

Fonte: Elaborado pelo autor

mente possível apresentar apenas a resposta final, algumas tarefas podem apresentar múltiplos caminhos de solução, que podem exigir habilidades diferentes. A inferência dessas habilidades pode ser comprometida (VANLEHN, 2008). Um STI que assiste o estudante nas etapas de resolução é chamado de *step-based* tutor.

A Figura 2 exemplifica o conceito de etapas, ou passos, em uma tarefa. Esta figura compreende a resolução de uma equação de 1º grau. Em cada etapa da resolução, o aluno deve aplicar uma operação algébrica para solucioná-la. Através dessa resolução passo-a-passo, o sistema pode inferir que esse aluno é capaz de compreender conceitos como Operação Inversa da adição (passo 1) e da multiplicação (passo 3) e as 4 operações matemáticas fundamentais (passos 2,4 e 5). Nesse caso, cada operação aplicada para resolver a equação corresponde a uma unidade de conhecimento.

O *Model Tracing* (ANDERSON et al., 1990, 1992) é uma técnica que utiliza o conhecimento da Base de Domínio para validar a resposta do aluno. A técnica consiste em usar um conjunto finito de regras que permitem ao sistema encontrar uma resposta equivalente a do aluno, partindo do mesmo ponto que ele. Geralmente, ele é empregado com a teoria ACT*. Se esse conjunto não for encontrado, então a resposta do aluno não está correta. Nesse caso, o sistema deve identificar se o erro ocorreu por alguma falsa concepção que o aluno possua. Por exemplo, na álgebra, um erro muito comum dos alunos é realizar a soma $3x + 2$, resultando em $5x$. Este tipo de erro é conhecido como falsa concepção, ou *misconception*. Os STIs, como o LispTutor e o Algebra I Cognitive Tutor, implementam as *buggy rules*, que são conjuntos de regras de produção especializadas em identificar essas falsas concepções dos alunos (ANDERSON et al., 1990; KOEDINGER et al., 1997).

2.2.2 Modelo do Aluno

O Modelo do Aluno compreende todas as atividades relacionadas às características do aluno, como inferir o seu conhecimento, reconhecer o seu estilo de aprendizagem (WOOLF; MCDONALD, 1984) e armazenar tais informações juntamente com o seu perfil em uma base de dados. O perfil do aluno consiste em informações pessoais, como nome, sexo, idade, escola, personalidade, por exemplo.

Modelos de Aluno também podem ser capazes de inferir e armazenar informações referentes às características afetivas do aluno, como motivação, confiança e engajamento (WOOLF, 2008). Este tipo de característica pode interferir diretamente na interação do aluno com o sistema (JAQUES; LEHMANN; PESTY, 2009). Um aluno desmotivado dificilmente apresentará um bom desempenho no estudo. Sendo capaz de inferir emoções, um STI pode ajustar o seu comportamento e o seu conteúdo de modo a motivar o aluno a prosseguir no seu estudo.

O processo de inferência de conhecimento ocorre durante a resolução das tarefas. Isto porque é neste momento que o aluno demonstra o seu conhecimento ao sistema, sendo os dados da resolução das tarefas as únicas evidências de conhecimento que o sistema obtém (VANLEHN, 2006). Essas evidências atualizam o modelo de inferência do sistema, que retorna informações sobre que habilidades foram exercitadas. Na literatura, é muito comum o uso de redes Bayesianas para este modelo de inferência (CONATI; GERTNER; VANLEHN, 2002; REYE, 2004; MILLÁN; LOBODA; CRUZ, 2010).

O *Knowledge Tracing* (CORBETT; ANDERSON, 1994) é outra técnica utilizada para inferir o conhecimento do aluno. Esta é baseada em cálculos de probabilidade e visa a verificar se o aluno compreendeu ou não determinada regra relacionada a uma habilidade cognitiva. A técnica tem como base quatro parâmetros: (i) o conhecimento inicial do aluno $P(L_0)$, (ii) a probabilidade dele passar do estado de “não sabe” para o estado “sabe” $P(T)$, (iii) a probabilidade de erro por falta de atenção (*slip*) $P(S)$, e (iv) a probabilidade do aluno acertar a questão por “sorte” (*guess*) $P(G)$. Uma vez que o aluno atinja ao menos 95% de probabilidade em uma regra, é considerado que ele dominou essa habilidade cognitiva (*mastered*). Na seção 5.1, é apresentada uma descrição mais aprofundada sobre essa técnica, bem como a sua evolução.

Maiores informações sobre o Modelo de Aluno podem ser encontradas na seção 4.

2.2.3 Tutor

O componente Tutor é o componente responsável pelo controle de toda a interação do aluno com o STI. Ele combina estratégias de ensino com as informações disponibilizadas pela Base de Domínio (como materiais instrucionais) e pelo Modelo de Aluno (como o conhecimento do aluno, estilo de aprendizado e estado afetivo) para adaptar o ensino para cada tipo de aluno (BURNS; CAPPS, 1988).

O componente também é responsável por retornar ao aluno o resultado das correções das tarefas, apresentando um *feedback* ao aluno. Este representa um indicativo visual do estado atual da etapa do exercício, esteja ela certa ou errada. O *feedback* pode ser mínimo, como o texto “A sua resposta está errada” ou um ícone indicando erro. Pode ainda ser um *error feedback*, que é uma descrição do erro que pode conter informações para corrigi-lo, como “Você tentou somar 97 com 56?” (VANLEHN, 2006). Segundo (WOOLF, 2008), *feedbacks* mais focados na tarefa promovem um melhor aprendizado, uma vez que descrevem o que foi realizado e auxiliam o aluno a corrigir o seu erro.

O *feedback* pode ser imediato ou atrasado (*delayed*). O primeiro é apresentado logo após a resolução de uma etapa, e o segundo ao final do exercício. O primeiro é recomendado para alunos iniciantes, uma vez que eles não possuem muita experiência com o conteúdo novo. Por outro lado, o segundo tipo de *feedback* é indicado para alunos mais avançados, que já estão mais familiarizados com o conteúdo. Para eles o *feedback* atua apenas lembrando certos conceitos do exercício (WOOLF, 2008).

Além de *feedbacks*, o Tutor também pode auxiliar o aluno através de dicas, que são textos explicativos focados em auxiliar a resolver uma etapa da tarefa. As dicas, ao contrário dos *feedbacks*, são apresentadas antes da resolução do passo, e, geralmente, são sob demanda, cabendo ao aluno a decisão de requisitá-las ao Tutor (VANLEHN, 2006).

Tanto as dicas quanto os *feedbacks* podem implementar o conceito de níveis de abstração (VANLEHN, 2006), que define para cada assunto uma organização hierárquica dos textos de ajuda, utilizando níveis de 1 a n . O nível 1 representa os textos mais genéricos sobre o assunto. À medida que o aluno requisita mais dicas deste mesmo assunto, este nível vai aumentando, até atingir o nível n . Neste nível n , os textos geralmente apresentam a resposta da etapa, o que permite ao aluno prosseguir no exercício.

O Tutor pode interferir uma vez que ele detecte uma quantidade expressiva de erros em uma determinada habilidade, significando que algum conteúdo anterior não foi compreendido e, portanto, necessita de revisão. O Tutor, então, poderá apresentar materiais instrucionais que reforcem o aprendizado desta habilidade.

O comportamento do Tutor dependerá da estratégia pedagógica utilizada. Na área de Sistemas Tutores, as estratégias pedagógicas estão divididas em três grupos (adaptado do capítulo 4 de (WOOLF, 2008)): estratégias baseadas no ensino humano, estratégias baseadas em teorias de aprendizagem, e estratégias facilitadas pela tecnologia.

As **Estratégias baseadas no ensino humano** compreendem aquelas estratégias que foram observadas no dia a dia em sala de aula e que obtiveram sucesso em sua aplicação (WOOLF, 2008). A seguir, são descritas, brevemente, duas estratégias.

- **Formação de Aprendizagem:** Estratégia que delega toda a responsabilidade do estudo ao aluno; implementa ajuda sob demanda, na qual o Tutor interfere apenas quando requisitado, respondendo às dúvidas do aluno. É aplicada em domínios que não possuem um caminho fixo de solução, como música, medicina, atletismo e pilotagem. Pode implementar a técnica do *faded scaffolding* na qual, à medida que o aluno melhora o seu desempenho, a intervenção do Tutor vai diminuindo até o aluno ser capaz de resolver por si só as atividades.
- **Resolução de Problemas:** utilizada em domínios cujas atividades apresentam múltiplos passos bem definidos, ou seja, erros e acertos estão bem documentados. Deste modo, permite a utilização das *buggy rules*. Entre os domínios que utilizam este tipo de estratégia, estão a Matemática, a Física e a Programação.

O segundo grupo compreende as **Estratégias baseadas em Teorias de Aprendizagem**. Estas são teorias desenvolvidas através da colaboração entre cientistas cognitivos, educadores naturalistas e filósofos, e apresentam novas possibilidades de ensino (WOOLF, 2008). O uso de tais teorias em STIs permite a verificação da sua eficácia. A seguir, são descritas cinco teorias.

- **Teoria de Aprendizado Socrática:** Baseada na teoria socrática, uma forma de ensino grega e antiga, baseia-se no princípio de que cada pessoa possui a essência das ideias e respostas para todos os problemas do universo (WOOLF; MCDONALD, 1984). A técnica baseia-se no diálogo e consiste em uma discussão entre duas pessoas, na qual o tutor irá propor questões, relacionadas a um tema central, ao aluno. Tais questões tem o objetivo de fazer o aluno refletir sobre o tema e tirar suas próprias conclusões e com isso aprender sobre o tema.
- **Teoria Cognitiva:** Teoria adotada por STIs de sucesso como o Andes e o Cognitive Tutor, ela visa ao ensino da forma mais eficiente possível, baseando-se na identificação de processos mentais. Para isso, cada tarefa é subdividida em unidades simples (etapas), e a partir delas são elaboradas instruções que guiam o aluno (WOOLF, 2008), frente a novas informações, comparam-na com o conhecimento já adquirido e buscam estabelecer relações entre elas. Este processo ocorre em três estágios: (i) Recebimento de informação pelos sensores de entrada; (ii) Armazenamento da mesma na memória de curto prazo e (iii) Transferência da informação da memória de curto prazo para a memória de longo prazo, seja através de memorização ou através de prática. A implementação desta técnica exige a definição e a implementação das habilidades cognitivas no STI.
- **Teoria Construtivista:** Desenvolvida por Piaget, define o processo de aprendizado como um conjunto de disciplinas, que toda pessoa atravessa ao longo da vida. Em cada etapa, o processo de ensino deve condizer com a idade dos alunos. Por exemplo, segundo a teoria, dos 8 aos 11 anos, a criança deve lidar com objetos concretos, dessa forma, frações podem ser ensinadas através de blocos e figuras. Quando ela atinge os 12 anos, entra o pensamento abstrato, então, frações podem ser ensinadas através de fórmulas e números decimais. Esta teoria defende que o aluno deve buscar o conhecimento por si, através de relações sociais e troca de ideias.
- **Aprendizado Situado:** O processo de aprendizagem é influenciado pelo contexto em que o aluno está inserido (contexto cultural e social). Ocorre através da troca de experiências entre os indivíduos mais novos e os mais experientes. Esta estratégia contrasta com o ensino em sala de aula que é, muitas vezes, abstrato e fora do contexto do alunos. Tutores que implementam esta estratégia são muito utilizados no meio militar, em programas de treinamento. Nestes sistemas, é apresentado ao aluno um ambiente, e o tutor deverá ensiná-lo a interagir com esse ambiente. Uma vez treinado, quando o aluno estiver em uma situação real, ele saberá o que fazer.

- **Interação Social e Zona de Desenvolvimento Proximal:** Definida por Vygotsky e, assim como o construtivismo e o aprendizado situado, também tem como ponto fundamental a interação social. É combinada com a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZPD), que define um nível que as crianças atingem quando estão engajadas em um aprendizado colaborativo. Apresenta um ganho de aprendizado maior do que um aprendizado sem colaboração, sendo similar ao aprendizado situado. O objetivo dos STIs que utilizam esta estratégia é manter os alunos dentro da ZPD. O aluno pode sair por diversos fatores, seja por ele estar entediado, confuso ou não conseguir prosseguir devido à alguma dificuldade. Cabe ao STI adaptar o seu conteúdo de modo a manter o aluno interessado, por exemplo, provendo exercícios nem muito fáceis, de modo a evitar o tédio, e nem muito difíceis, que impeçam o aluno de prosseguir ou que possam confundi-lo.

Por fim, há as estratégias que têm como base o emprego da tecnologia. Nesse contexto, encontram-se os **Agentes Pedagógicos Animados**, que são personagens animados com o propósito de motivar o aluno durante o seu estudo. Eles fazem uso da IA para guiar as suas ações e possuem os seus próprios objetivos e crenças (WOOLF, 2008). Interagem com o ambiente em que estão situados, como a interface do STI, podendo exibir mensagens na tela, como os *feedbacks* ou as dicas providas pelo Tutor; através de gestos e movimentos podem prover explicações ao aluno (MARTINS, 2013).

Agentes mais complexos podem expressar emoções de modo a gerar alguma empatia com o aluno. Por exemplo, o agente demonstrar preocupação, ou expressar felicidade quando o aluno atinge alguma meta. Conforme (WOOLF, 2008), esses agentes proporcionam importantes benefícios educacionais, tais como:

- São uma companhia para o aluno; alguém que o encoraja e demonstra preocupação com ele.
- Interveem quando o aluno se sentir desestimulado.
- Transmitem entusiasmo ao aluno.
- Possuindo personalidades interessantes, podem tornar o aprendizado mais divertido.

2.2.4 Componente de Comunicação

O componente Tutor é responsável pelo controle da interação do aluno com o sistema e pela tomada de decisão no que se refere a que tipo de conteúdo deve ser apresentado. Decisão tomada, os materiais instrucionais selecionados são encaminhados ao componente de comunicação que os apresenta ao estudante. Da mesma forma, se o aluno realizar alguma interação com o sistema, como resolver algum exercício, ou assistir algum vídeo explicativo, ele realiza tais ações no componente de comunicação. Ele repassa as informações relevantes, como quais materiais foram acessados, ao componente Tutor.

Composto por uma interface gráfica, do inglês *Graphical User Interface* (GUI), esse componente é a porta de comunicação entre o aluno e o Tutor, também é a forma como o aluno o enxerga. Por isto, o *design* de uma GUI pode exercer grande influência no desempenho do aluno (WOOLF, 2008). Interfaces com restrições de recursos, ou então com excesso, podem contribuir negativamente para o seu aprendizado. Se a interface não é bem estruturada e bem intuitiva, o aluno terá que utilizar um tempo considerável para aprender a utilizar o sistema, tempo em que ele poderia estar interagindo com o Tutor e aprendendo (BURNS; CAPPS, 1988).

GUIs devem ser transparentes para o aluno (BURNS; CAPPS, 1988). Por exemplo, se utiliza botões com ícones, eles devem transmitir a exata ideia da funcionalidade de botões. Uma interface intuitiva reduz a chamada carga cognitiva, a quantidade de informações que o aluno necessita memorizar para interagir com o sistema, neste caso, aspectos de funcionalidades da interface. Portanto, o aumento da carga cognitiva pode influenciar negativamente no desempenho do aluno (REIS et al., 2012).

O Andes (GERTNER et al., 1998) é um STI de Física cuja interface gráfica é um componente importante. Isso porque a interface permite ao aluno escrever fórmulas, definir variáveis e desenhar gráficos ou vetores, de modo a resolver o exercício. Todas essas ações são capturadas pela interface, repassadas ao Tutor que encaminha ao Modelo de Aluno, que irá identificar a linha de raciocínio empregada pelo aluno para resolver o exercício com base nessas informações.

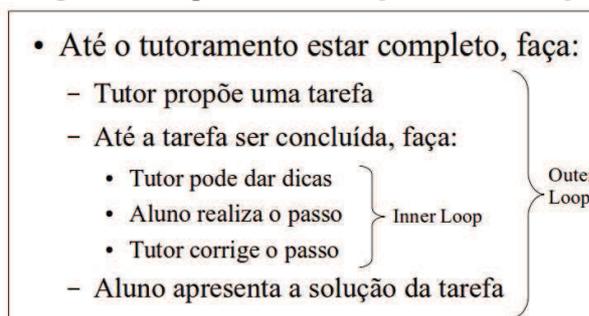
A comunicação entre o aluno e o Tutor pode ocorrer de diversas formas, seja através de uma interface gráfica tradicional (botões e menus), que contém ou não um agente pedagógico animado; através do uso de processamento de linguagem natural de modo a prover ao aluno um ambiente de diálogo com o tutor (como por exemplo os STIs socráticos), ou a implementação de uma interação via voz. Ao se desenvolver uma comunicação mais complexa, deve-se ter em mente o tempo necessário para o seu desenvolvimento e a carga computacional extra envolvida (WOOLF, 2008).

2.3 Funcionamento

Durante a interação com o aluno, um STI realiza uma série de atividades de modo a acompanhar o aluno durante o seu estudo. Conforme visto na seção 2.2, cada uma destas atividades é realizada por um componente específico. Quando o aluno inicia o seu estudo, o tutor seleciona um material instrucional apropriado. Se o material for um exercício, o tutor irá acompanhar o aprendiz à medida que ele resolve cada etapa (passo) deste exercício. A cada passo resolvido, o Modelo de Aluno atualiza o modelo deste aluno com as informações que ele foi capaz de inferir, baseando-se nas informações repassadas ao Tutor pelo componente de comunicação. Conforme o Tutor vai aprendendo sobre o aluno, materiais que condizem com o seu conhecimento e estado afetivo são apresentados. Tal característica adaptativa é o que define a “Inteligência” dos STIs.

VanLehn (2006) estrutura o funcionamento de um STI, organizando cada atividade em duas grandes iterações, ou *loops*. O *inner loop* compreende todas as atividades que estão relacionadas

Figura 3: Etapas do *inner loop* e do *outer loop*



Fonte: Adaptado de (VANLEHN, 2006)

à resolução de um exercício pelo aluno, como prover dicas de como resolvê-lo, a resolução de uma etapa pelo aluno e a realização da correção pelo sistema. No **outer loop**, ocorrem atividades como a seleção de exercícios com base no conhecimento do aluno, a apresentação do exercício e a submissão da resposta final por parte do aluno. A Figura 3 ilustra essa estruturação das atividades. Como pode ser observado, o *inner loop* está contido no *outer loop*. Portanto, a cada iteração do *outer loop*, o *inner loop* é executado múltiplas vezes.

2.3.1 Inner loop

O *inner loop* compreende todas as atividades realizadas, pelo sistema e pelo aluno, durante a resolução de um exercício. Durante este *loop*, o exercício é dividido em etapas ou passos de resolução. Esta divisão permite ao sistema obter mais informações sobre o conhecimento do aluno.

Durante a resolução de cada passo, o sistema pode (VANLEHN, 2006):

- Oferecer **dicas** ao aluno de como resolver o passo. Essas dicas podem ser bem específicas, como apontar o caminho a ser seguido para resolver o passo (por exemplo, “Os valores $3x$ e $4x$ podem ser somados”), ou mais gerais, como relembrar conceitos (por exemplo, “Nesta situação há termos equivalentes. Qual operação aplicar para que esta fração se torne irreduzível?”). A apresentação de dicas, pelo tutor, geralmente ocorre sob demanda, como quando o aluno pressiona um botão.
- Prover um **feedback** deste passo, que pode ser imediato (ao final do passo), atrasado (ao final do exercício) ou sob demanda (quando o aluno requisita ao Tutor). Para o segundo caso, a correção ocorrerá ao final do exercício, a menos que a solução do aluno viole alguma restrição do sistema (por exemplo, como o uso de alguma instrução SQL que não contribui para a solução final em um exercício de SQL).
- Ao prover um **feedback**, este pode ser um **feedback simples**, que indica apenas se a resposta está correta ou incorreta, ou um **error feedback**, que são explicações de como corrigir o passo em caso de resposta incorreta.

- **Avaliar** o conhecimento do aluno com base nas informações obtidas com a correção dos passos. Uma das formas com que esta avaliação é realizada é através da contagem dos eventos em que ocorre alguma aprendizagem (*learning events*).

Eventos de aprendizagem se referem à correta aplicação de um componente de conhecimento (uma regra, um conceito) durante a resolução de uma etapa. Os eventos de aprendizagem são eventos mentais, ocorrendo na mente do aluno e não podendo ser observados. Já as etapas, que são eventos físicos, ocorrem na interface do sistema e podem ser observados (VANLEHN, 2006). Portanto, a forma com que o sistema obtém dados sobre a aprendizagem é através desses eventos observáveis. Se uma etapa de uma atividade exige certas habilidades para ser resolvida, e a mesma for resolvida corretamente, então os contadores relativos a essas habilidades são incrementados. Em contrapartida, se a mesma etapa for resolvida incorretamente, os contadores relativos às mesmas habilidades são decrementados (VANLEHN, 2006). O capítulo 4 aborda em mais detalhes esta questão de avaliação de conhecimento do aluno.

2.3.2 *Outer loop*

O *Outer loop* tem como principal atividade a seleção de materiais instrucionais para serem apresentados ao aluno (VANLEHN, 2006). Tal seleção pode variar dependendo da complexidade do STI. A forma mais básica de seleção de conteúdos é apresentar ao aluno uma **listagem de conteúdos** e permitir que ele realize a seleção do conteúdo a ser visto. Outra forma que os STIs podem lidar com o conteúdo é através de um **roteiro sequencial**, no qual o aluno necessita completar um conteúdo para que ele possa prosseguir para o seguinte.

Mastery learning e *macroadaption* são formas mais complexas de seleção de conteúdos, pois ambas utilizam o conhecimento do aluno para realizar a seleção. No *mastery learning*, os conteúdos são organizados por níveis de dificuldade, em unidades que tratam de determinados conhecimentos. Enquanto o aluno se encontra em uma unidade, todas as tarefas do *inner loop* estarão relacionadas aos conhecimentos desta unidade. O aluno apenas estará habilitado a prosseguir para a próxima unidade, quando o sistema inferir que o aluno domina todos os conhecimentos da unidade corrente. Já o *macroadaption* realiza a seleção baseando-se na intersecção entre as habilidades exigidas pelo exercício e as habilidades que o aluno já domina. Não há necessidade de o aluno dominar todas as habilidades exigidas pelo exercício, uma vez que o objetivo do sistema é permitir que o aluno exercite essas habilidades.

2.4 PAT2Math

O PAT2Math (*Personal Affective Tutor to Math*) é um STI voltado para o ensino/aprendizado de álgebra elementar, trabalhando com resolução de equações de 1º e 2º grau com uma incógnita. Sua Base de Domínio permite ao aluno resolver equações algébricas passo-a-passo e obter uma correção do sistema ao final de cada passo; esta correção é realizada em tempo real. O sis-

tema também é capaz de oferecer dicas ao aluno de como resolver o passo corrente da equação, bem como oferecer um *feedback* explicando como corrigir um passo incorreto.

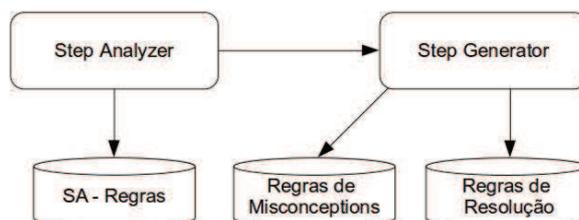
Sua arquitetura divide cada componente do sistema em módulos independentes, seguindo a arquitetura de um STI apresentada na seção 2.2. O PAT2Math possui um módulo especialista (JAQUES et al., 2013) responsável pela correção dos passos da equação. É dividido em 3 subcomponentes:

1. O **Módulo Resolvedor**, ou PATsolver, foi desenvolvido inicialmente como um software independente (SEFFRIN et al., 2009) capaz de resolver uma equação por completo, utilizando uma *shell* de sistema especialista. Este módulo implementa regras que representam a aplicação de uma operação de 1º ou 2º grau sobre uma equação compatível, ou seja, se é possível aplicar tal operação sobre a equação.
2. O **Módulo Cognitivo** aplica as regras do PATsolver de modo a encontrar a solução apresentada pelo aluno, ou seja, ele realiza o *model tracing*. Esse módulo possui um conjunto próprio de regras que auxiliam na redução do espaço de busca pela solução. Por exemplo, ele aplica regras para detecção de somas, subtrações, multiplicações e divisões que o aluno possa ter realizado, ao invés de testar todas as possibilidades de aplicação das 4 operações fundamentais na equação (SEFFRIN et al., 2010).
3. O **Módulo de falsas concepções**, ou módulo de *misconceptions* ou ainda *buggy rules*, contém um terceiro conjunto de regras responsável por detectar os erros mais comuns dos alunos ao resolver as equações (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2011). Tais erros não são exatamente erros, mas concepções que estão corretas em determinados contextos mas em outros não (MATZ, 1982). Na multiplicação $3x \times 2$, o conceito de operar incógnitas com inteiros é correto. No entanto, o mesmo não se aplica para a soma, em que não é possível operar $3x + 2$.

Segundo (JAQUES et al., 2013), o módulo especialista do PAT2Math compõe o que é definido em (VANLEHN, 2006) como *step analyzer* (SA) e *step generator* (SG), componentes do *inner loop*. O primeiro, o SA, é responsável pela análise e correção do passo do exercício, e compreende os módulos 2 e 3 supracitados. Já o segundo, o SG, é responsável por gerar o próximo passo do exercício, compreende o módulo 1. Esse último módulo também permite ao PAT2Math apresentar dicas de resolução ao aluno. Na Figura 4, a arquitetura do módulo especialista é apresentada.

O PAT2Math possui um editor de resolução de equações, chamado PATEquation, que representa o *Inner Loop* do PAT2Math. O PATEquation é responsável pela comunicação entre o aluno e o STI, e possui um agente pedagógico animado, que é responsável por apresentar ao aluno as mensagens enviadas pelo componente cognitivo, como dicas e *feedbacks*. Este agente foi implementado através do *framework* Divalite, que permite uma fácil integração com aplicações

Figura 4: Arquitetura do Módulo especialista do PAT2Math



Fonte: Traduzido de (JAQUES et al., 2013)

web, por ser implementado através de Javascript e jQuery. É um *framework* gratuito para uso em pesquisas e softwares de ensino, sendo vetado para uso comercial (DIVALITE, 2011).

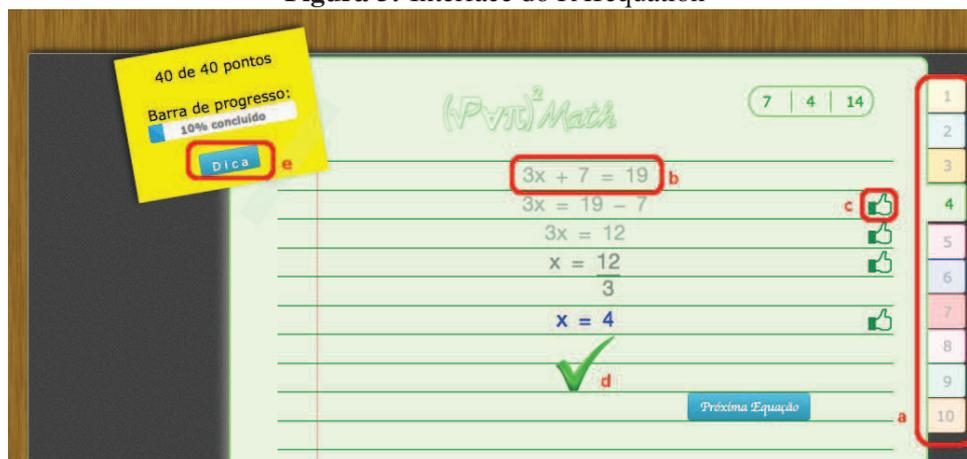
O PATequation teve a sua primeira versão implementada em um *applet* Java, porém, devido a limitações da tecnologia, foi portado totalmente para a web através de HTML 5 e javascript. Entre as limitações observadas, destaca-se a incompatibilidade entre o editor e o agente: o agente não podia interagir com o editor, apontando termos da equação de modo a prover explicação. Outra limitação estava na incapacidade do editor de se adaptar a monitores com resoluções muito pequenas, que exigia do aluno o uso das barras de rolagem do navegador para interagir com a interface, e acabava por esconder o agente pedagógico (MORAIS; JAQUES, 2013).

No presente momento, o PAT2Math possui implementado, em maior parte, o *inner loop*. Quanto ao *outer loop*, ele possui uma lista de planos em que o aluno pode selecionar o exercício a ser resolvido. Cada plano é composto por um conjunto de equações para o aluno resolver, de preferência, passo-a-passo. O sistema admite uma certa liberdade ao resolver uma equação, permitindo a omissão de certos passos por parte do aluno. Nesse caso, o Modelo Cognitivo deve descobrir qual o raciocínio empregado pelo aluno ao resolver um passo da equação. A Figura 5 apresenta a atual interface do PATequation em HTML 5 e javascript.

Ao selecionar um exercício, o editor apresenta um conjunto de 10 equações para o aluno resolver, na ordem de preferência do estudante. Elas podem ser acessadas através das abas (a). A equação selecionada é apresentada em (b) e os passos são resolvidos logo abaixo. Ao completar um passo, o aluno pressiona o botão localizado ao final da linha correspondente para enviar a solução para correção (*feedback* sob demanda). O editor envia a solução para o Modelo Cognitivo corrigir, que retorna um *feedback* mínimo (indicando acerto ou erro do passo), ilustrado em (c). Finalizada a resolução da equação, um retorno do sistema é mostrado (d). As dicas do sistema são acessadas por (e) e mostradas na esquerda da interface, conforme a Figura 6. Caso o aluno erre uma etapa, um *error feedback* é mostrado no mesmo local das dicas.

No que se refere às dicas e *error feedbacks*, o PAT2Math os implementa utilizando a definição apresentada por Vanlehn (2006), organizando-os nas hierarquias de níveis, onde os níveis variam entre 1 e 5 ou 1 e 3. Porém, o PAT2Math delimita a visibilidade dos textos de acordo

Figura 5: Interface do PATequation



Fonte: Elaborado pelo autor

com o conhecimento do aluno. Estudantes que demonstram conhecer melhor cada habilidade, neste caso, cada operação, recebem os textos do nível 1 a $\frac{n}{2}$. Já alunos menos experientes recebem textos de $\frac{n}{2}$ a n . Isso porque, para os alunos mais experientes, a dica é uma forma de ajudar a relembrar conceitos, o que para alunos menos experientes não seriam de grande ajuda (SEFFRIN et al., 2012). Em qualquer caso, o nível n sempre é mostrado, de modo a permitir ao aluno prosseguir no estudo.

Como este módulo de dicas mostrou-se muito simplista, uma vez que é apresentado apenas o texto da dica, sem qualquer alteração na interface, ou na equação, o trabalho proposto por (MARTINS, 2013) estende a funcionalidade deste módulo, integrando um agente pedagógico animado. Com essa integração, o agente passa a utilizar gestos para explicar as dicas, destacando partes da equação que estão referenciadas no texto de ajuda. A Figura 6 ilustra o módulo em funcionamento; neste exemplo, o aluno pede ajuda para resolver a equação $x + 4 = 3 \times 2$. O módulo especialista do PAT2Math identifica como próximo passo a aplicação da operação de multiplicação. Uma dica correspondente é apresentada ao aluno; inclui uma referência aos termos a serem multiplicados (2 e 3). Essa informação é encaminhada ao agente que os destaca para o aluno através de gestos.

O uso de gestos para auxiliar na explicação é uma técnica muito observada em sala de aula. Estudos realizados em escolas mostraram que o seu uso possui um papel importante no aprendizado (COOK; DUFFY; FENN, 2013), agindo como uma complementação à explicação do professor.

Figura 6: Dica apresentada de forma textual, referenciando termos da equação corrente e o agente apontando para estes termos (2 e 3)

The image shows a screenshot of a math application interface. At the top left, there is a question mark icon and a yellow sticky note that says "-4 de 50 pontos" and "Barra de progresso: 0% concluído" with a "Dica" button. The main area is a light blue grid with the equation $x + 4 = 3 \cdot 2$ written in the top row. A cartoon character is pointing at the equation. Below the equation, there is a white speech bubble that says "Os termos 3 e 2 estão ligados por uma operação de multiplicação." On the right side, there is a vertical navigation bar with numbers 1 through 10. The top right corner shows a score of 15 | 11 | 13.

Fonte: (MARTINS, 2013)

3 REDES BAYESIANAS

Esta seção apresenta conceitos básicos sobre redes Bayesianas, como a sua estrutura, o seu processo de inferência, o seu processo de construção, bem como um tipo especial de rede Bayesiana: as redes Bayesianas Dinâmicas.

3.1 Visão Geral

Redes Bayesianas (RB) são modelos probabilísticos que descrevem a relação de dependência entre variáveis aleatórias (RUSSELL; NORVIG, 2002), sendo utilizadas para realizar inferências sobre dados incertos. Elas representam a distribuição conjunta de probabilidade (DPC) de um conjunto de variáveis. Esta distribuição compreende as probabilidades de um conjunto de variáveis X_1, X_2, \dots, X_n ¹, dadas todas as combinações de valores que estas variáveis podem assumir, e é definida pela fórmula $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (RUSSELL; NORVIG, 2002). Dessa forma, as RBs possuem todas as informações necessárias para responder qualquer questão sobre este conjunto de variáveis (PEARL, 1988). Aplicando a fórmula para um conjunto X de variáveis, com cada variável assumindo os valores x_1, x_2, \dots, x_n , conforme mostra a equação 3.1 (PEARL, 1988).

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1) P(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) \\ &\quad \dots P(x_3 | x_2, x_1) P(x_2 | x_1) P(x_1) \\ &= \prod_{i=1}^n P(x_i | Pais(X_i)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Na qual a função $Pais(X_i)$ especifica o conjunto de variáveis que influenciam diretamente a variável X_i .

3.1.1 Teorema de Bayes

Conforme (RUSSELL; NORVIG, 2002), nem sempre é possível ter acesso a todas as probabilidades da DPC. Por exemplo, um médico sabe que uma determinada doença pode causar determinado sintoma com 50% de probabilidade. Ele também sabe que as chances de um paciente possuir esta doença é de $\frac{1}{50000}$ e do paciente apresentar tal sintoma independentemente da doença é de $\frac{1}{20}$. O médico deseja saber qual a probabilidade do paciente possuir tal doença dado que ele apresenta o sintoma. O teorema de Bayes permite o cálculo deste tipo de probabilidade, através da fórmula 3.2:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad (3.2)$$

¹Segundo a notação apresentada em (RUSSELL; NORVIG, 2002), o uso de letra maiúscula para o nome de variável representa a variável em si, já o uso de letra minúscula representa um valor qualquer assumido pela variável.

Aplicando o Teorema de Bayes no exemplo acima e considerando os valores $P(\text{sintoma}|\text{doença}) = 0,5$, $P(\text{doença}) = \frac{1}{50000}$, $P(\text{sintoma}) = \frac{1}{20}$, obtêm-se o valor de 0,0002, conforme demonstrado na equação 3.3:

$$P(\text{doença}|\text{sintoma}) = \frac{0,5 \times \frac{1}{50000}}{\frac{1}{20}} = 0,0002 \quad (3.3)$$

Há casos em que não estão disponíveis todas as probabilidades individuais de cada evento ($P(X_i)$). No entanto, estas podem ser obtidas através do somatório de probabilidades condicionais que sejam mutuamente excludentes (PEARL, 1988). Para estes casos, a fórmula 3.2 é alterada para:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)} \quad (3.4)$$

Esta fórmula é a base das técnicas Bayesianas, nas quais condicionam uma hipótese H à determinada evidência e (PEARL, 1988). No exemplo acima, a hipótese da presença de uma doença em um paciente está condicionada à presença da evidência de um sintoma específico.

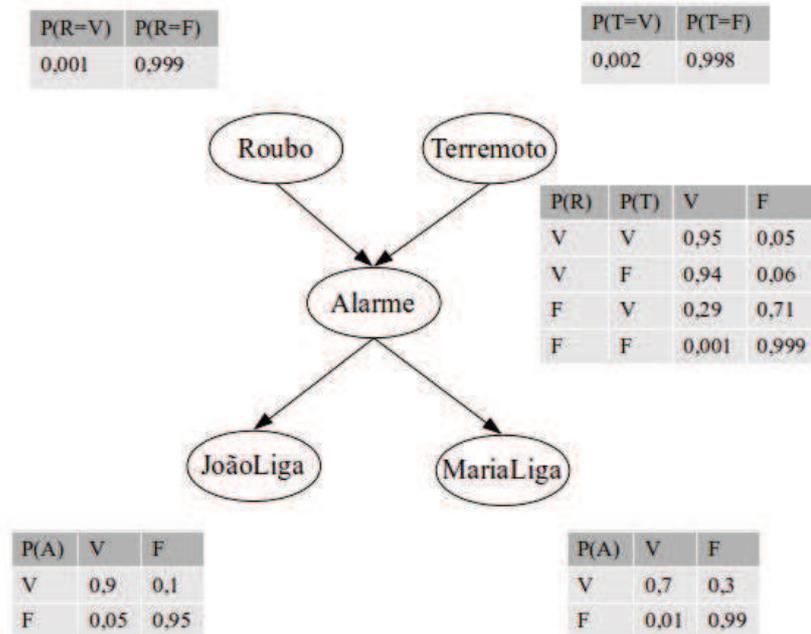
3.2 Estrutura

Redes Bayesianas são representadas por um grafo dirigido acíclico (*Directed Acyclic Graph* - DAG), no qual os vértices (nodos) representam as variáveis e os arcos descrevem as relações condicionais entre as variáveis. Cada variável pode assumir um determinado conjunto de valores, denominados estados, que possuem uma probabilidade de ocorrência. Nodos podem possuir diversos estados, porém, é comum encontrar redes com apenas nodos binários, com 2 estados.

Se uma variável X estende um arco para a variável Y , é dito que Y é dependente de X e a probabilidade de ocorrência de Y é definida pela probabilidade condicional $P(Y|X)$. Se nenhuma variável estende um arco para X , então esta possui apenas as probabilidades *a priori*, ou seja, $P(X)$ (PEARL, 1988). Por não possuir arcos direcionados a elas, este tipo de variável também é referenciada como nodo-raiz (*Root Node*) devido a certas estruturas de redes se assemelharem a árvores, as *Polytrees*. As probabilidades de cada variável, condicional ou *a priori*, são definidas nas tabelas de probabilidades presentes em cada nodo (RUSSELL; NORVIG, 2002). Estas probabilidades representam a força da influência de uma variável sobre a outra (PEARL, 1988).

RBs também definem a independência condicional entre as variáveis. O conceito de independência condicional se refere ao evento em que a probabilidade condicional de uma variável X é definida por $P(X|Y, Z)$ e ocorre do valor da variável Z ser conhecido, tornando a informação de Y irrelevante. A independência condicional é definida por $P(X|Y, Z) = P(X|Z)$: “ X é independente de Y , dada a informação de Z ”, ou $I(X, Z, Y)$. Por exemplo, sabendo o tempo em que o último ônibus passou em uma determinada parada (Y), pode-se ter uma ideia de quando

Figura 7: Rede Bayesiana do modelo do alarme e suas respectivas tabelas de probabilidades



Fonte: Traduzido de (RUSSELL; NORVIG, 2002)

o próximo virá (X). No entanto, ao tomar conhecimento da localização deste próximo ônibus (Z), a informação de Y se torna irrelevante para determinar informação X (PEARL, 1988).

Considere o exemplo a seguir, amplamente utilizado na literatura, sobre uma rede Bayesiana (RUSSELL; NORVIG, 2002). Este exemplo se refere a um alarme instalado em um local de modo a prevenir roubos. O alarme dispara toda vez que um ladrão invade o local. No entanto, o local é propenso a terremotos, o que acaba, também, disparando o alarme. Ao sair de viagem, o dono do local pediu aos vizinhos, João e Maria, que lhe telefonassem caso o alarme disparasse. Porém, o alarme, apesar de confiável, às vezes pode falhar. João sempre avisa quando o alarme toca, porém, também confunde o alarme com o telefone. Já Maria ouve música alta e, às vezes, não ouve o alarme tocar. Esses fatos, juntamente com o fato do alarme disparar em caso de terremoto, devem ser levados em conta ao modelar a RB e caracterizam as incertezas do modelo. A Figura 7 ilustra a rede deste exemplo.

Observa-se que na rede da Figura 7 não há variáveis representando o fato do João confundir o alarme com o telefone, nem o fato de Maria escutar música alta. Esses fatores, que interferem diretamente na ação de telefonar para o dono do local, estão expressos nas tabelas de probabilidade tanto do João ligar, $P(j|a) = 0,9$, quanto da Maria ligar, $P(m|a) = 0,7$. A confiabilidade do alarme também está expressa em sua tabela, na qual lista que, em caso de roubo, há chances de 6% do alarme falhar ou de 5% em caso de roubo e terremoto. Em caso de terremoto, há chance de 29% do alarme disparar e chances de 0,1% do alarme disparar sozinho, quando não ocorre nem terremoto e nem roubo.

Ao construir uma rede Bayesiana é necessário que se tenha conhecimento do domínio do

modelo, de modo a definir corretamente as variáveis e seus respectivos estados. Uma vez definidas, o próximo passo é definir as relações entre elas. O método causal define uma relação de causa-efeito entre as variáveis, no qual as causas exercem influência sobre os efeitos (PEARL, 1988). A rede da Figura 7 foi modelada neste método, pois tanto “roubo” quanto “terremoto” **causam** o disparo do “alarme”, e o disparo do alarme **resulta** na ligação do “João” ou da “Maria”.

Definidas as relações, define-se as probabilidades das tabelas de cada nodo. É muito comum nesta etapa haver a participação de especialistas no domínio modelado, de modo a auxiliar na definição das probabilidades *a priori* e das probabilidades condicionais. Outras formas de se obter esses valores incluem análises estatísticas (MANSKE; CONATI, 2005) e técnicas de aprendizado de máquina (BAKER; CORBETT; ALEVEN, 2008; LEE; BRUNSKILL, 2012). Em alguns casos, em que certas probabilidades não podem ser estimadas a partir de dados disponíveis, é possível basear as estimativas em resultados encontrados na literatura (CONATI; GERTNER; VANLEHN, 2002).

Conforme citado na seção anterior, uma RB representa a distribuição de probabilidade conjunta, que está decomposta nas tabelas de probabilidade de cada nodo (RUSSELL; NORVIG, 2002). A partir dos dados da RB é possível obter qualquer probabilidade relacionada às variáveis. Para ilustrar este fato, considere a rede da Figura 7: deseja-se calcular a probabilidade do alarme (A) ter tocado, não havendo roubo (R), nem terremoto (T), e tanto o João (J) quanto a Maria (M) terem ligado.

$$\begin{aligned} P(j, m, a, \neg r, \neg t) &= P(j|a)P(m|a)P(a|\neg r, \neg t)P(\neg r)P(\neg t) \\ &= 0,90 \times 0,7 \times 0,001 \times 0,999 \times 0,998 \\ &= 0,00062 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dessa forma, é possível obter informações referentes à distribuição conjunta de probabilidade.

Por tratar-se de uma área que lida com incerteza, a mesma permite a aplicação de lógica com ruídos, como o *noisy-OR*. O *noisy-OR* é uma técnica empregada na definição das tabelas de probabilidades dos nodos da rede. Ela é caracterizada pela aplicação do operador lógico OR combinado com incertezas. A tabela 1 apresenta a DPC de um modelo que condiciona a presença de febre à presença, ou não, de determinadas doenças (malária, gripe e resfriado).

3.3 Inferência

O método de inferência em Redes Bayesianas consiste em, inicialmente, apresentar ao modelo as evidências e observar as mudanças que ocorrem nos valores das probabilidades das variáveis. Evidências são variáveis nas quais há 100% de certeza de que ela irá assumir um determinado valor. Quando uma variável está nesta situação é dito que ela está **instanciada** (PEARL, 1988). Por exemplo, na frase “aconteceu um roubo”, para o modelo do alarme, a

Tabela 1: DPC do modelo com *noisy-or*

Resfriado	Gripe	Malária	$P(\text{Febre})$	$P(\neg\text{Febre})$
F	F	F	0	1
F	F	V	0,9	0,1
F	V	F	0,8	0,2
F	V	V	0,98	$0,02 = 0,2 \times 0,1$
V	F	F	0,4	0,6
V	F	V	0,94	$0,06 = 0,6 \times 0,1$
V	V	F	0,88	$0,12 = 0,6 \times 0,2$
V	V	V	0,988	$0,012 = 0,6 \times 0,2 \times 0,1$

Fonte: Traduzido de (RUSSELL; NORVIG, 2002)

variável “Roubo” tem seu estado “Verdadeiro” alterado para 100% quando for observado um roubo na residência. Quando um valor na rede é alterado, as outras probabilidades da rede devem ser recalculadas com base nesta nova evidência, ou seja, a evidência é propagada pela rede. Após a propagação, conclusões podem ser obtidas com base nos novos valores obtidos dos nodos.

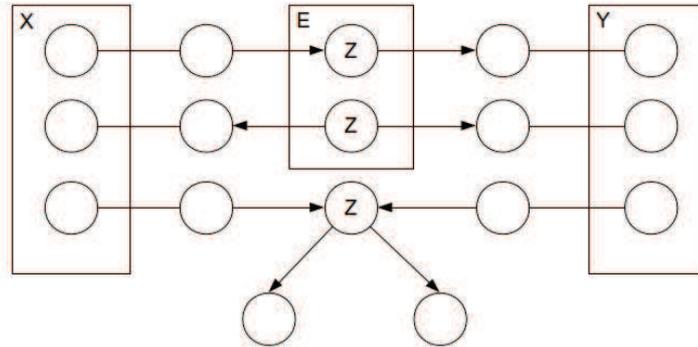
Os tipos de inferência realizados pelas RBs podem ser de 4 tipos:

- **Predição:** Quando a evidência é apresentada a uma variável que representa uma causa, e é desejado observar o comportamento da variável que é influenciada por esta. Ex: Aconteceu um roubo, qual a probabilidade de João ligar ($P(j|r)$)?
- **Diagnóstico:** Quando a evidência é apresentada a uma variável que representa um efeito, e é desejado observar as causas prováveis. Ex: João ligou, quais as chances de ter acontecido um roubo ($P(r|j)$)?
- **Intercasual:** Várias causas sobre um efeito em comum. Ex: Aconteceu um terremoto, e o alarme tocou, quais as chances de roubo, ou $P(r|t \wedge a)$?
- **Mista:** Quando dois modelos de inferência são utilizados em conjunto. Ex: João ligou e não houve terremoto, quais as chances do alarme tocar, ou $P(a|j \wedge \neg t)$?

3.3.1 D-Separação

D-separação define que um conjunto de variáveis X é independente de outro conjunto Y de variáveis, dado um terceiro conjunto Z , ou seja, define $I(X, Z, Y)$. Considerando um conjunto E de variáveis instanciadas, Pearl (1988) define a ocorrência da d-separação em duas situações:

1. Ao longo do caminho entre X e Y há uma variável $Z \subseteq E$, ou seja, ela está instanciada, e não possui arcos convergentes.
2. Ao longo do caminho entre X e Y , há arcos convergindo para uma variável Z , nem ela nem os nodos-filhos estão instanciados ($Z \not\subseteq E$).

Figura 8: X está d-separado de Y dado Z

Fonte: (GLUZ, 2014)

Caso uma dessas situações ocorra, é dito que o caminho entre X e Y está bloqueado, ou seja, nem X influencia em Y , nem Y influencia em X devido a Z . A Figura 8 ilustra esses dois casos. No segundo caso, se os filhos de Z fossem instanciados, o caminho passaria a ser denominado **ativado**. Ativado é qualquer caminho na rede que não está bloqueado (PEARL, 1988).

3.4 Redes Bayesianas Dinâmicas

Redes Bayesianas Dinâmicas, ou RBD, compreendem um tipo especial de RBs que permitem raciocínios ao longo do tempo. Sua estrutura é composta por uma RB que apresenta relações condicionais com cópias de si, sendo que cada cópia representa um instante de tempo. Para (REYE, 2004), em representações de processos contínuos do mundo real, RBDs podem representar mudanças ocorridas como uma sequência de instantes de tempo (*time slices*). Para a representação de modelos de aluno, é mais útil que uma RBD represente uma sequência de interações.

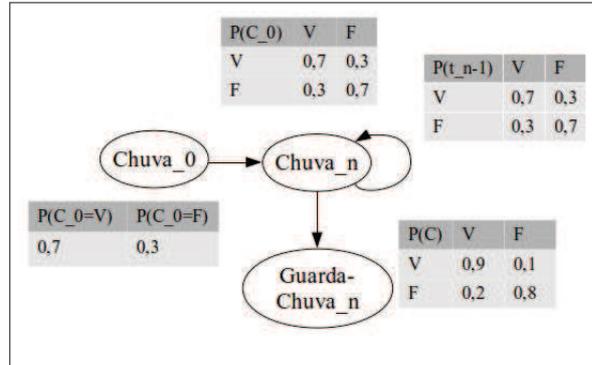
Na implementação de uma RBD, três tipos de probabilidades devem ser definidas: a distribuição do estado inicial, $P(X_0)$; as probabilidades de transição entre os *slices*, $P(X_{t+1}|X_t)$; e os nodo-sensores, $P(E_t|X_t)$, os nodos que receberão as evidências do instante de tempo t .

No processo de inferência, as evidências são apresentadas aos nodos-sensores e são propagadas pela rede. Uma RBD pode ser convertida em uma RB através do processo de **unrolling**, que consiste em inserir finitas representações da RBD, representando cada instante de tempo. Cada rede é unida à sua sucessora através das **relações temporais**, que são arcos que unem dois instantes de tempo, estabelecendo a relação condicional $P(X_{t+1}|X_t)$ para cada instante de tempo t .

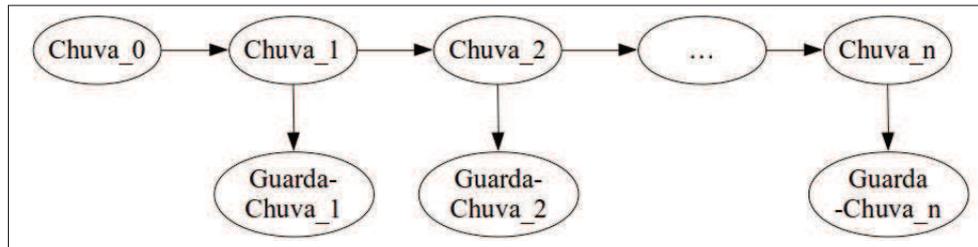
Considere o seguinte exemplo de uma RBD, extraído de (RUSSELL; NORVIG, 2002). Um guarda de uma instalação militar secreta gostaria de saber se está chovendo hoje. Como ele não tem acesso ao mundo externo, sua única evidência de chuva é o diretor, que todo dia chega

à base carregando, ou não, um guarda-chuva. A Figura 9(a)² ilustra a RBD deste pequeno exemplo que representa os dias que o guarda percebe ou não o guarda-chuva. Na Figura 9(b), a mesma rede foi convertida em uma RB através do *unrolling*.

Figura 9: Rede Bayesiana Dinâmica



(a) Rede Bayesiana Dinâmica



(b) Rede *Unrolled*

Fonte: Traduzido de (RUSSELL; NORVIG, 2002)

Se no dia 1 o guarda percebe o guarda-chuva, o nodo referente ao mesmo em t_1 é instanciado e a evidência é propagada. Da mesma forma, se o mesmo evento se repetir no dia 2, o nodo correspondente em t_2 é instanciado e a evidência é propagada. Por ser um modelo temporal, as chances de chuva no dia 2 aumentam em relação ao dia 1, devido à possível chance de chuva do dia anterior, combinado com a presença do guarda-chuva também no dia 2. Intuitivamente, isso pode significar que a chuva persiste nesses 2 dias (RUSSELL; NORVIG, 2002). Consequentemente, para o dia 3, a probabilidade de chuva deverá ser consideravelmente alta, a menos que uma evidência em t_3 diga o contrário.

²Embora uma RB ou uma RBD não apresentem ciclos, o arco apresentado nesta figura representa a relação temporal do nodo $Chuva_n$. Tal notação é utilizada no software GeNIe, que foi utilizado neste trabalho e que está disponível em <https://dslpitt.org/genie/>

4 MODELOS DE ALUNO E AVALIAÇÃO DO CONHECIMENTO

Modelos de Aluno armazenam informações referentes ao aluno e seu aprendizado em um STI, mas, tais informações não se restringem apenas ao seu conhecimento. Segundo (SELF, 1990), modelos de aluno podem armazenar outras informações que são importantes e relevantes ao aprendizado, como estilo de aprendizado do aluno, estratégias, preferências de materiais (escritos ou vídeos), e características afetivas do aluno (motivação, interesse, confiança).

Este é um componente que desempenha as suas funções principalmente durante o *inner loop*, pois sua principal função é avaliar o aluno. Conforme referenciado na seção 2.3.1, não é possível observar os eventos de aprendizagem, mas apenas os passos, as etapas resolvidas pelo aluno durante um exercício. Portanto, é através delas que o sistema será capaz de avaliar o aluno, e, conseqüentemente, montar um perfil desse aluno, identificando as suas características de modo a oferecer conteúdo relevante para ele.

Segundo apresentado em (WOOLF, 2008; MILLÁN; LOBODA; CRUZ, 2010), modelos de aluno podem ser classificados em:

- **Modelo de Sobreposição (*Overlay Model*):** O conhecimento do aluno é um subconjunto da área de domínio do sistema. No entanto, este modelo não considera as possíveis falsas concepções que o aluno venha a possuir.
- **Modelo Diferencial (*Differential Model*):** Uma extensão do modelo de sobreposição; divide o conhecimento em conhecimento que o estudante deve possuir e conhecimento que não é esperado que ele saiba (ou opcional). Como o modelo de sobreposição, este modelo também não considera as possíveis falsas concepções do aluno.
- **Modelo de Perturbação (*Perturbation Model*):** Pode ser considerado um modelo de sobreposição com a adição de conteúdos não pertencentes ao conteúdo original, como os erros mais comuns cometidos pelos alunos (suas falsas concepções). Este modelo também é conhecido como *Bug Library*, e é um modelo mais complexo de se manter devido à quantidade de informações extras. No entanto, consegue descrever melhor o aluno, em relação aos modelos anteriores. Em (WOOLF, 2008) são citadas as limitações deste tipo de modelo, indicando que o mesmo deve ser utilizado em domínios procedurais e relativamente simples, devido ao grande número de falsas concepções existentes. Também é mencionado que erros que dificilmente irão ocorrer não necessitam ser incluídos, de modo a simplificar o modelo.
- **Modelo baseado em Restrições (*Constraint-based model*):** Aplicadas em domínios com um amplo espaço de soluções, as restrições auxiliam na redução deste espaço (WOOLF, 2008). A vantagem deste modelo é uma questão que é considerada correta, a menos que a mesma viole qualquer restrição (ex: SQL-tutor). Sua implementação não exige tratamento de falsas concepções.

Neste ponto, há algumas questões interessantes: “Como avaliar o aluno?”, “Como decidir se o mesmo domina determinado conteúdo?” ou ainda “Como mensurar se o mesmo está pronto para novos conteúdos?”. Como **conhecimento** não é uma variável binária, ou seja, ou se sabe tudo ou não se sabe nada, há uma série de fatores que definem se um conhecimento foi aprendido ou não. Por exemplo, pode-se considerar o conhecimento prévio, pois é muito comum haver relações entre conhecimentos. No campo da álgebra, por exemplo, inicialmente os alunos são introduzidos a expressões envolvendo apenas as 4 operações fundamentais, para posteriormente introduzir conceitos mais complexos próprios da álgebra como incógnitas e equações.

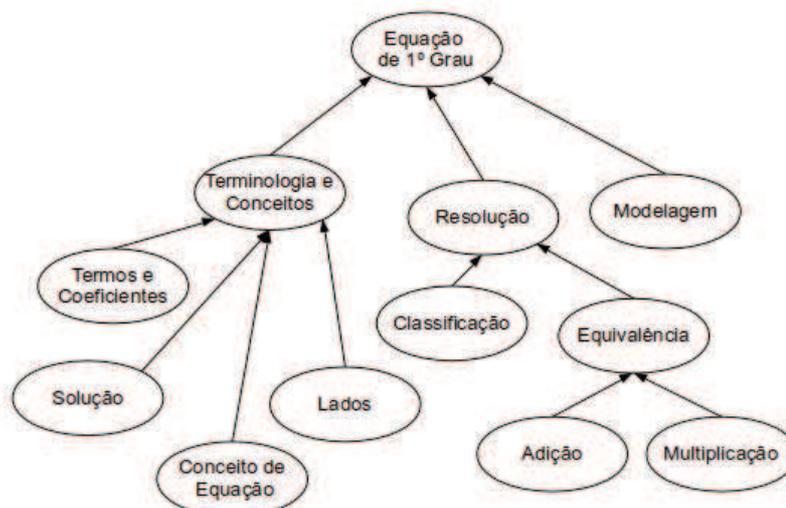
Conforme (BURNS; CAPPS, 1988), ao modelar uma estrutura de avaliação de conhecimento, deve-se ter em mente que nem todo o erro do aluno é intencional (por exemplo, devido a falsas concepções). Há aqueles pequenos erros que ocorrem por falta de atenção do aluno (*slips*). *Slips* ocorrem quando o aprendiz erra determinado passo cuja habilidade já foi considerada pelo sistema como “compreendida”. Da mesma forma, podem ocorrer acertos não intencionais, ou seja, o aluno não conhece determinado conceito, mas acerta determinado passo (*Guess*). STIs consideram estes dois fatores ao implementar um modelo de avaliação do aluno (VANLEHN, 2008; MILLÁN; LOBODA; CRUZ, 2010).

Em um modelo de avaliação do aluno, uma forma simples de avaliar o seu conhecimento é contar os acertos e erros, aplicar uma média aritmética, e, a partir deste resultado, afirmar se o aluno sabe ou não. No entanto, essa não é a maneira mais adequada de se avaliar o conhecimento do aprendiz (VANLEHN, 2006). Isso porque uma média aritmética não considera o fator temporal, por exemplo, considerando uma sequência de 2 erros (E) seguidos de 4 acertos (A), e outra sequência “E-A-A-E-A-A”, ambas para um mesmo passo de um exercício. Para uma média aritmética, ambas resultariam em 66% de conhecimento, quando, de fato, a primeira pode indicar que uma habilidade foi compreendida, enquanto que a segunda indica que alguma outra habilidade relacionada necessita ser reforçada.

O *Knowledge Tracing*, apresentado em (CORBETT; ANDERSON, 1994), é uma técnica utilizada para avaliar o conhecimento do aluno. A cada oportunidade que o aprendiz tem de demonstrar que possui determinado conhecimento, o sistema altera a sua estimativa sobre este aluno, neste conhecimento. Isso baseando-se no que este aluno demonstrou, ou seja, se surge uma oportunidade para demonstrar o conhecimento sobre multiplicações, então, o sistema irá alterar a sua estimativa sobre o aluno, quanto à operação de multiplicação, tomando como base as respostas submetidas por ele. Essa técnica baseia-se em 4 parâmetros: $P(L_0)$, $P(T)$, $P(S)$, $P(G)$, conforme apresentado na subseção 2.2.2. Estudos mais recentes buscam tornar essa técnica mais adaptada para cada tipo de aluno (BAKER; CORBETT; ALEVEN, 2008; PARDOS; HEFFERNAN, 2010; LEE; BRUNSKILL, 2012), utilizando técnicas de *Data Mining* para obter os valores dos parâmetros.

Entre as técnicas de IA aplicadas no Modelo de Aluno, destaca-se o uso de Redes Bayesianas aplicadas na avaliação do conhecimento do aluno, pois elas são estruturas capazes de lidar com incertezas. Essa técnica, descrita no capítulo 3, é muito utilizada na área de *User Model-*

Figura 10: Rede Bayesiana com generalização de conceitos



Fonte: Traduzida de (MILLÁN; LOBODA; CRUZ, 2010)

ling como os Modelos de Aluno (GERTNER et al., 1998; CONATI; GERTNER; VANLEHN, 2002; MILLÁN; LOBODA; CRUZ, 2010). Conforme será visto a seguir, as Redes Bayesianas também permitem estabelecer a relação de pré-requisitos entre os conceitos de um domínio.

Trabalhos como os de (MILLÁN; LOBODA; CRUZ, 2010; MILLÁN et al., 2013) apresentam o desenvolvimento de uma rede Bayesiana para avaliar o conhecimento do aluno, para o domínio de equações de 1º grau. Utilizado em conjunto com a Teoria de Resposta ao Item, para a modelagem das probabilidades, a rede proposta modela a relação entre conceitos de equações de 1º grau. O grafo assume a forma hierárquica, cuja base são as evidências da rede, ou seja, os exercícios resolvidos. Cada exercício está relacionado a um ou mais conceitos. Cada conceito vai se generalizando, ou seja, nós que representam conceitos mais específicos exercem influência no nodo que representa um conceito mais geral, como os nodos “Adição” e “Multiplicação” exercendo influência sobre o nodo “Equivalência”. O processo se repete até atingir a raiz “Equação de 1º Grau”, conforme mostra a Figura 10.

Em um trabalho anterior (CARMONA et al., 2005), é aplicado o conceito de pré-requisitos no MA de um STI, de modo a melhorar a inferência do modelo. O conceito de pré-requisitos baseia-se na ideia de que se há dois conceitos A e B, se A é pré-requisito de B e o aluno conhece B, então, provavelmente, ele também conhece A. Da mesma forma, se ele não conhece A, provavelmente, também não conhece B.

Segundo (SELF, 1990), bons Modelos de Aluno não devem saber tudo sobre o aluno, mas o suficiente para guiá-lo no estudo. O autor também defende a ideia de modelos mais abertos, aqueles que permitem ao aluno tomar conhecimento do que o sistema sabe sobre ele, removendo qualquer hipótese de que o sistema é onisciente e conhece tudo sobre o aluno. Também permite ao aluno avaliar o seu próprio conhecimento, o que pode contribuir positivamente para a sua autoimagem.

4.1 O fenômeno de *degeneracy*

Nesta seção, é apresentado um fenômeno que pode ocorrer nos modelos de avaliação de conhecimento dos Modelos de Aluno (MA). Tal fenômeno é conhecido como *degeneracy*, que consiste na probabilidade de alguma habilidade violar algum conceito previamente assumido (CONATI; DAVOODI, 2013). Por exemplo, o aluno pode ser capaz de responder corretamente uma questão, mas o modelo inferir que o mesmo não possui tal conhecimento. Tal fato ocorre quando os parâmetros de *Guess* e *Slip* são maiores que 0,5.

Foi provado que a técnica *Knowledge Tracing* sofre deste fenômeno (BAKER; CORBETT; ALEVEN, 2008). Por isto, Conati e Davoodi (2013) apresentam um estudo deste fenômeno em um modelo de aluno baseado em Redes Bayesianas Dinâmicas, uma vez que (REYE, 2004) mostrou que o *Knowledge Tracing* pode ser implementado através de uma RBD. Para este estudo, foi utilizado o MA do Prime Climb, que é um jogo educacional para prática de fatoração de números. Maiores informações sobre o Prime Climb serão apresentadas na seção 5.2.4.

Degeneracy é o termo que se refere ao fenômeno que ocorre quando algum pressuposto do sistema é violado, no caso do Prime Climb são 2:

1. Evidências de acerto não devem diminuir a probabilidade do aluno saber alguma habilidade.
2. Evidências de erro não devem aumentar a probabilidade do aluno saber alguma habilidade.

De modo a verificar a presença deste fenômeno no modelo do Prime Climb, dois testes foram elaborados. O primeiro visou verificar a violação direta aos pressupostos do sistema, e o segundo a violação em caso de dependências condicionais, ou seja, havendo duas habilidades X e Y, se X implica em Y, então uma ação correta em X não deverá diminuir a probabilidade do aluno saber Y. Conforme os testes realizados, ocorreu de o modelo sofrer de *degeneracy*. Visando reduzir este fenômeno, foi necessária a definição de um novo conjunto específico de parâmetros. Esses deviam apresentar, ao menos, a mesma acurácia do conjunto anterior. O novo conjunto de parâmetros encontrado possuía uma acurácia equivalente ao conjunto original. No que diz respeito ao fenômeno de *degeneracy*, ele conseguiu apresentar menos casos de ocorrência do fenômeno. Conforme apresentado em (CONATI; DAVOODI, 2013), apenas os parâmetros, relacionados às probabilidades condicionais, foram alterados, mas a estrutura da rede manteve-se a mesma. Os autores apresentam como próximo passo de desenvolvimento do trabalho a individualização desses parâmetros para cada aluno.

5 TRABALHOS RELACIONADOS

Este capítulo apresenta trabalhos que foram pesquisados e possuem relação com o estudo proposto. Buscou-se obter trabalhos que possuísem relação com Modelos de Aluno e Redes Bayesianas. Para a realização desta pesquisa, as principais bibliotecas foram consultadas (ACM, ¹ Science Direct ² e IEEE ³), bem como as principais conferências (ITS, ICALT, SBIE) e periódicos (UMUAI, IJAIED, Computers & Education) da área da informática na educação. Ao final deste capítulo, todos os trabalhos serão comparados e as principais diferenças serão destacadas.

5.1 Knowledge Tracing

Apresentado em (CORBETT; ANDERSON, 1994), e mencionado na seção 2.3.1, o *Knowledge Tracing* (KT) é uma técnica probabilística para avaliação do conhecimento do aluno, baseada em um conjunto de quatro parâmetros: $P(L_0)$, $P(T)$, $P(S)$ e $P(G)$. O KT considera o Modelo de Aluno como um modelo de sobreposição (ver seção 4), sendo o domínio do sistema um conjunto de regras de produção. Cada regra é, então, um conhecimento a ser aprendido. Esta técnica trabalha com dois estados: *unlearned state*, o estado em que o aluno não conhece a regra, e o *learned state*, o estado em que o aluno aprendeu a regra. Durante a interação do aluno com o sistema, ele possui uma certa probabilidade de passar do estado (*unlearned state*) para o (*learned state*), esta representada por $P(T)$. Em (YUDELSON; KOEDINGER; GORDON, 2013), esta probabilidade é nomeada como “Taxa de Aprendizado”. Nesse modelo, o fator de “esquecimento” não é considerado, ou seja, não há transição inversa, do *learned* para o *unlearned*.

Cada regra é tratada individualmente, portanto, não há relação de dependência, ou pré-requisito entre elas. Em seu artigo (REYE, 2004), abordando o uso de redes Bayesianas e Redes Bayesianas Dinâmicas em modelos de aluno, o autor demonstra que essa técnica pode ser modelada através de uma Rede Bayesiana Dinâmica, ou um *Hidden Markov Model*.

Devido ao fenômeno de *degeneracy*, descrito na seção 4.1, no trabalho de (BAKER; CORBETT; ALEVEN, 2008) é estudado o ajuste dos parâmetros de *Guess* ($P(G)$) e *Slip* ($P(S)$), a fim de reduzir esse fenômeno. Uma das soluções é manter o $P(G) \leq 0,3$ e $P(S) \leq 0,1$. Outra solução encontrada foi a estimação dos parâmetros através de Regressão Linear. Tal escolha mostrou melhor resultados em relação a *Support Vector Machine* e *Multilayer Perceptron* (BAKER; CORBETT; ALEVEN, 2008). Visando a um modelo mais individualizado para cada aluno, em (PARDOS; HEFFERNAN, 2010) é estudado uma alteração: o parâmetro de conhecimento inicial ($P(L_0)$) foi alterado de modo que cada aluno possuíse um valor independente. Esse valor foi obtido, inicialmente, através de valores aleatórios, e, posteriormente, o resul-

¹Disponível em: <http://dl.acm.org/>

²Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/>

³Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/>

tado dessa rede, com valores aleatórios, foi utilizado como $P(L_0)$. Já em (LEE; BRUNSKILL, 2012), o estudo foca-se em personalizar os quatro parâmetros originais do *Knowledge Tracing*, agora chamado de *Bayesian Knowledge Tracing*, que são calculados através de *expectation maximization*.

Em (YUDELSON; KOEDINGER; GORDON, 2013), é apresentado outro estudo sobre individualização dos parâmetros, visando descobrir qual parâmetro contribui mais para a individualização do modelo. Para isso, foram realizadas quatro avaliações, cada uma utilizando um modelo diferente e individualizando um parâmetro diferente:

1. Um *Bayesian Knowledge Tracing* padrão, sem individualização;
2. Um modelo com o $P(L_0)$ individual;
3. Um modelo com o $P(T)$ individual;
4. Um modelo com os parâmetros $P(L_0)$ e $P(T)$ individualizados;

De modo a evitar o *degeneracy*, os parâmetros $P(G)$ e $P(S)$ foram restringidos. Os dados utilizados nesta avaliação foram cedidos pela Carnegie Learning Inc. e compreendem os sistemas *Algebra I* (8.918.054 linhas - 3.310 alunos) e *Bridge to Algebra* (20.012.498 linhas - 6.043 alunos) dos anos de 2008-2009⁴. Tais dados compreendem resultados de interações dos alunos com os respectivos sistemas. A avaliação fez uso de uma ferramenta própria que realizou os ajustes nos dados e aplicou a técnica de *cross-validation*. Os resultados mostraram que o modelo 3 obteve melhores resultados em relação aos outros, ou seja, um modelo que utilizou apenas o parâmetro específico de taxa de aprendizado ($P(T)$). A inclusão dos parâmetros $P(G)$ e $P(S)$, neste estudo, é citada como trabalho futuro.

5.2 Redes Bayesianas Aplicadas à avaliação de conhecimento

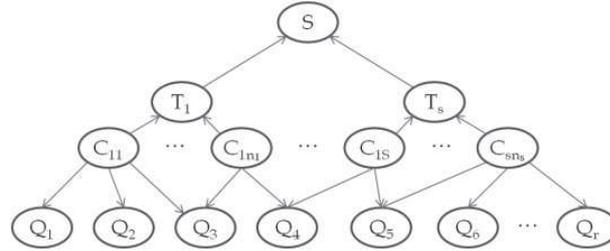
5.2.1 Álgebra

O trabalho de (MILLÁN et al., 2013) descreve um MA genérico, implementado em um programa de teste de múltipla escolha aplicado via computador. O modelo fora testado anteriormente com alunos simulados (MILLÁN; CRUZ, 2002). O objetivo deste trabalho (MILLÁN et al., 2013) é o teste com alunos humanos.

O modelo apresenta dois tipos de variáveis:

- **Variáveis de conhecimento (K):** são variáveis que representam o conhecimento do aluno. Elas são binárias (0-Sabe ou 1-Não Sabe) e “Escondidas”, ou seja, as informações não podem ser mensuradas diretamente. São divididas em: (i) **variáveis de conceito (C)**, que

⁴Disponível em <http://pslclatashop.web.cmu.edu/KDDCup>.

Figura 11: Estrutura do Modelo de Aluno

Fonte: (MILLÁN et al., 2013)

representam os conceitos mais básicos do domínio, (ii) **variáveis de tópicos** (T), compostas por um conjunto de conceitos, e (iii) **variáveis de assunto** (S), que são compostas por um conjunto de tópicos.

- **Variáveis de Evidência (Q):** representadas pelas questões do sistema de testes, são variáveis binárias podendo assumir os valores “Correto” ou “Incorreto”. São ditas observáveis, pois representam os dados que podem ser obtidos através do ambiente, neste caso os resultados das questões aplicadas.

A rede modelada apresenta uma estrutura hierárquica, cujos conceitos *C* (*concept*) compõem a base desta hierarquia. Cada conjunto de conceitos estende um arco para um tópico *T* (*topic*) específico, indicando que o aprendizado deste conceito influencia diretamente o aprendizado do tópico. Da mesma forma, um tópico *T* irá estender um arco para um assunto *S* (*subject*) com a mesma finalidade. Esta hierarquia é mostrada na Figura 11.

Sendo a base da hierarquia, os nodos *C* não recebem influência de nodo algum; possuem apenas probabilidades *a priori*, são nodos-raiz. Além dos nodos *T*, os nodos *C* também estendem arcos para os nodos *Q*, indicando que se o aluno conhece os conceitos, então ele é capaz de resolver as questões. Estes nodos *Q*, por sua vez, podem ser influenciados por um ou mais conceitos. Por exemplo, considerando a rede da Figura 10, se uma questão Q_1 tratar sobre multiplicação e adição, então o nodo Q_1 da rede receberá arcos tanto do nodo de “Adição” quanto “Multiplicação”, indicando a influência deste conceitos sobre a questão.

Na definição das tabelas de probabilidades dos nodos *C*, que possuem probabilidades *a priori* $P(C_i)$, foram atribuídos valores uniformes ou, quando disponível, valores estimados a partir de dados. Para os nodos condicionais $P(K|K_1, \dots, K_n)$, sendo $W = w_1, \dots, w_n$ um conjunto de pesos, no qual cada w_i representa a importância que um item K_i tem sobre K , a probabilidade condicional deste nodo K é definida pela equação 5.1 (MILLÁN et al., 2013).

$$P(K = 1 | (\{K_i = 1, i \in I\}, \{K_i = 0, i \notin I\})) = \sum_{i \in I} w_i \quad (5.1)$$

Onde $I = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | K_i = 1\}$.

Para o nodo Q , a probabilidade condicional $P(Q_i | C_1, \dots, C_n)$, estando Q_i relacionado aos conceitos $\{C_1, \dots, C_n\}$, é calculada com base em uma fórmula tendo como base a Teoria de

Resposta ao Item, combinada com as probabilidades de *Guess* e *Slip*.

A Teoria de Resposta ao Item é uma modelagem estatística aplicada principalmente em testes de múltipla escolha. Sua modelagem mais atual utiliza a estatística Bayesiana, que define que a probabilidade de o aluno acertar um item está condicionada à sua habilidade e a seus conhecimentos (MILLÁN; CRUZ, 2002).

A avaliação deste modelo contou com 152 alunos, do 9º ano, de duas escolas particulares de Figueira da Foz - Portugal. Inicialmente os alunos realizaram um teste escrito composto de 14 questões de diversos tipos (múltipla escolha, resposta curtas, preenchimento de espaços em branco e resolução de problemas). Após, três professores corrigiram os testes, atribuindo um valor entre 0 e 1 para cada conceito básico (*C*). Este valor indica o quanto o professor acredita que o aluno sabe de cada conceito.

Em outra situação, os mesmos alunos responderam mais 14 questões no sistema computado-rizado. Tais questões foram sorteadas de um banco de 56 questões, todas possuindo 2 escolhas - Verdadeiro ou Falso. Os resultados desses testes foram submetidos à rede Bayesiana.

Os resultados dos testes escritos mostraram um alto grau de concordância entre os professores. As médias das pontuações dos professores e o resultado da rede foram, então, comparados. Para o modelo escrito, houve um alto grau de concordância entre os valores. No entanto, ao comparar os resultados dos professores com os resultados da rede, para o modelo computacional, esse fenômeno não foi observado. Segundo os autores, a causa deve-se ao alto valor da probabilidade de *Guess* utilizado (0,5) e a certas restrições que o sistema computacional apresenta.

5.2.2 Álgebra e Falsas Concepções

Duijnhoven (2003) apresenta um estudo de caso de um modelo de rede Bayesiana aplicado à avaliação do conhecimento algébrico do aluno. Com base nos resultados dos itens de avaliação, o modelo classifica o aluno em três categorias.

Quanto à sua estrutura, o modelo possui dois tipos de nodos-raiz e três tipos de nodos condicionais. O primeiro tipo de nodo-raiz possui apenas um representante: o nodo *Group*, que é o responsável por classificar o aluno. Esse nodo, ao contrário dos demais que são binários, possui três estados. Esses estados são a classificação que a rede atribuiu ao aluno: *High level*, *Medium level* ou *Low level*. Para este nodo não foi utilizada uma estrutura causal devido ao número considerável de nodos-pais que ele possuiria. Como ele possui três estados, seria necessário definir $3 \times (2^n)$ probabilidades condicionais, sendo n o número de pais do nodo.

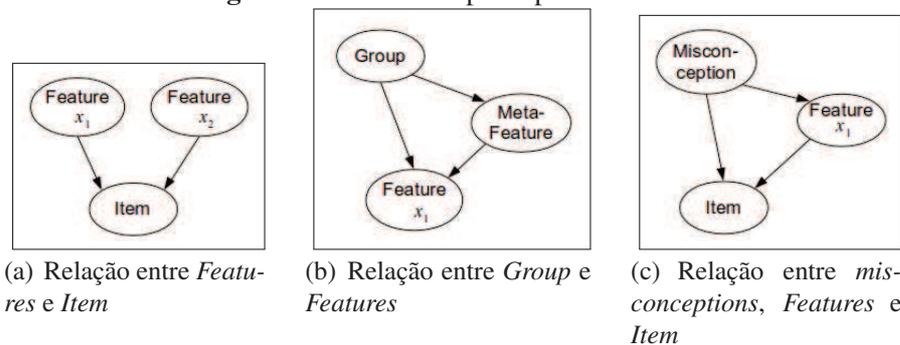
O outro tipo de nodo-raiz existente no modelo compreende os nodos que representam as *misconceptions* dos alunos. Eles estabelecem uma relação causal com os conceitos e itens de avaliação relacionados a ela (Figura 12(c)). A maioria dos nodos do modelo também são nodos binários cujos estados indicam a presença ou não da *misconception*.

As relações condicionais estabelecidas entre os nodos estão ilustradas na Figura 12. Observa-

se que o modelo implementa três tipos de nodos:

- Os nodos **Item** referem-se aos instrumentos de avaliação (exercícios); seus dois estados são *Correct* e *Incorrect*. São as variáveis observáveis do modelo, cujas probabilidades condicionais estão relacionadas às chances de sucesso no item. Se há um nodo-pai que indica desconhecimento (*non-mastery*) de alguma *feature*, então, provavelmente, a resposta deste item está incorreta.
- Os nodos **Feature** representam o conhecimento algébrico, e estão relacionados diretamente aos itens, indicando quais conhecimentos são necessários para resolvê-los. Seus dois estados são *Mastery* e *Non Mastery*. Exemplos de conhecimentos tratados por este nodos: frações, divisão, ordem das operações.
- Os nodos **Meta-Feature** compreendem os nodos que estão indiretamente relacionados aos itens e representam conceitos relacionados a um subconjunto *Features*. Possui os mesmos estados das *Features* pois também representam conhecimento. Exemplo: Propriedade Comutativa e Fator Comum.

Figura 12: Estruturas principais do modelo



Fonte: Adaptado de (DUIJNHOFEN, 2003)

O modelo também considera os eventos em que o aluno “adivinha” a resposta (*guess*). Isso é implementado no modelo através de um parâmetro β que representa a probabilidade $P(\textit{guess})$. Da mesma forma, é definido um parâmetro α que define o evento de *slip*. Tais parâmetros estão implementados nos nodos *Item* conforme as seguintes probabilidades condicionais (DUIJNHOFEN, 2003):

$$P(\textit{resposta_correta}|\textit{pais_compreendidos}) = 1 - \alpha$$

$$P(\textit{resposta_correta}|\textit{ao_menos_um_pai_nao_foi_compreendido}) = \beta$$

A relação entre as probabilidades condicionais nesses nodos é similar ao AND lógico (Figura 12(a)), ou seja, *Item* será igual a $1 - \alpha$ se todos os nodos-pais forem verdadeiros. No entanto, um conceito pode possuir diversos caminhos de solução, como $(a + b)^2$ que pode

ser resolvido pela regra do produto notável: $a^2 + 2ab + b^2$; ou pela propriedade distributiva: $(a + b) \times (a + b)$. Para esses, casos as probabilidades condicionais modelaram uma relação similar ao OR lógico:

$$\begin{aligned} P(\text{resposta_correta}|\text{ao_menos_um_pai_compreendido}) &= 1 - \alpha \\ P(\text{resposta_correta}|\text{nenhum_pai_foi_compreendido}) &= \beta \end{aligned}$$

Na definição das probabilidades condicionais das relações entre *Group* e *Feature* e *Meta-Feature* (Figura 12(b)), foi realizada uma análise nos resultados do software Quick Quiz. Essa é uma ferramenta para verificar a compreensão da expectativa algébrica dos alunos. A análise contou com a ajuda de especialistas e técnicas de *machine learning*, como árvores de decisão e *clustering*. Da mesma forma, essas técnicas foram utilizadas na definição das probabilidades *a priori* do nodo *Group*.

Os nodos que modelam as *misconceptions* (Figura 12(c)) tiveram as suas tabelas de probabilidade condicional *Feature*, definidas conforme a tabela 2.

O modelo foi avaliado por meio de uma avaliação qualitativa e de uma quantitativa. Para cada avaliação foram gerados diversos modelos da rede: uma rede simples, uma rede contendo padrões de entendimento do aluno, três redes com as *misconceptions* e uma rede sem as *meta-features*.

Na avaliação quantitativa, essas redes foram avaliadas nos quesitos de facilidade do item, se a rede infere corretamente no nível de dificuldade do item, baseando-se nos conhecimentos necessários para resolvê-lo; capacidade preditiva, se a rede prediz corretamente o grupo do aluno; comparação de desempenho entre os modelos. Os resultados da avaliação mostraram que o modelo com padrões de entendimento do aluno e os dois modelos com as *misconceptions* demonstraram melhor desempenho.

A avaliação qualitativa verificou as *misconceptions*, *slips* e *guesses*, e a capacidade informativa das redes. Como resultado, foi observado que a rede que implementa *misconceptions* obteve sucesso na previsão, utilizando apenas como evidência o resultado de diversos itens. A *misconception* influenciou na probabilidade de o aluno conhecer a *Feature* relacionada a ela.

No que diz respeito a *slips* e *guesses*, a rede foi capaz de identificar um evento de *guess*, no qual apenas um *Item* correto não influenciou no fato de o aluno não dominar a *Feature* correspondente, indicando um evento de *guess*. Isso também se deve ao fato de outros itens relacionados a essa mesma *Feature* estarem incorretos.

Observou-se que, para os alunos que são classificados como *High level*, são maiores as chances da rede diagnosticar *slips* e que, para alunos *Low level*, há maiores chances da rede identificar *guesses*. Isso porque, no primeiro caso, há um número maior de *Features* compreendidas, em contrapartida, no segundo, esse número é menor.

Quanto à capacidade informativa da rede, foi observado que quanto mais *Features* estão envolvidas em determinado *Item*, menor a chance de ser resolvido corretamente. Isso acontece porque o desconhecimento de qualquer *Feature* resulta em baixa probabilidade de uma resposta

Tabela 2: Probabilidades condicionais para o nodo *Item*, considerando uma relação entre um nodo *Feature* e um nodo *Misconception*

Feature	Misconception	
	True	False
mastery	$\beta_3 = 0,05$	$1 - \alpha = 0,95$
non-mastery	$\beta_2 = 0,5$	$\beta = 0,40$

Fonte: (DUIJNHOVEN, 2003)

correta, indicando que de quanto mais *Features* depende um *Item*, mais difícil ele é.

Para essas avaliações, foram utilizados dados de alunos reais, implementados em alunos simulados. Isso permitiu conhecer o que cada aluno “sabe” de modo a verificar a confiabilidade da rede. O resultado das duas avaliações mostrou que o modelo de rede com as *misconceptions* apresentou um melhor desempenho, porém, a sua estrutura é mais limitada em questão de informação e capacidade de predição.

O desenvolvimento da rede contou com o auxílio de especialistas e de *machine learning* para elicitar os conceitos a serem utilizados na rede, bem como as probabilidades. O autor conclui afirmando que a rede necessita de refinamentos em sua estrutura, bem como adição de outras *misconceptions*, e um estudo sobre individualizar a rede para cada tipo de aluno, definindo as probabilidades *a priori* dos nodos das *misconceptions* de acordo com cada aluno.

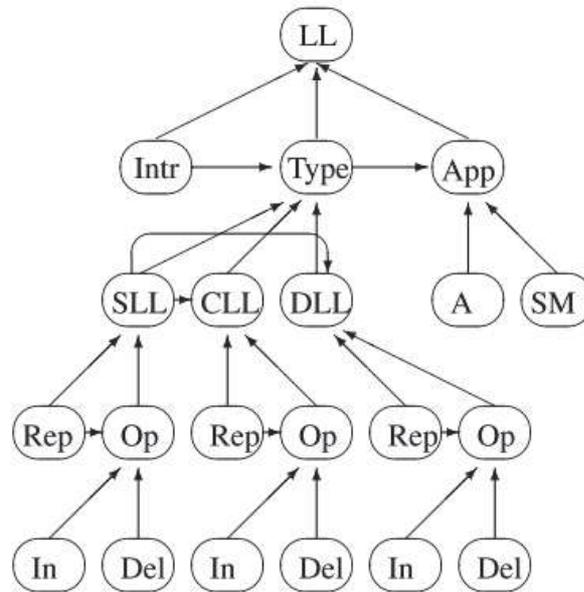
5.2.3 Programação

No trabalho de (NOUH; KARTHIKEYANI; NADARAJAN, 2006), é elaborado um modelo de avaliação para o domínio de programação, mais especificamente estruturas de dados, utilizando uma abordagem baseada em Redes Bayesianas similar à estrutura de (MILLÁN et al., 2013). No entanto, permite relação entre nodos do mesmo nível, por exemplo relação entre tópicos, ou entre conceitos, o que indica a relação de precedência entre os tópicos, ou entre os conceitos. Para exemplificar essa relação, a Figura 13 apresenta um fragmento da rede⁵, listando apenas os tópicos e conceitos de listas encadeadas - *Linked List* (LL). Para que o aluno compreenda o tópico de LL, é necessário que aprenda os três tipos de listas (Simplesmente encadeada, Circular e Duplamente encadeada). Esse aprendizado inicia-se, primeiro, pela Lista Simplesmente Encadeada, para, então, avançar para a Lista Circular ou para a Duplamente Encadeada: não há relação de precedência entre a Circular e a Duplamente Encadeada. Da mesma forma, é necessário entender como cada estrutura é representada (Rep) antes de compreender as suas operações.

Este trabalho também aplica a Teoria de Resposta ao Item para estimar as probabilidades entre os conceitos (nodos-raiz) e itens (questões). Nodos de conhecimento (K) possuem três

⁵LL:Lista Encadeada, Intr: Introdução, App: Aplicação, SLL: Lista Simplesmente encadeada, CLL: Lista Circular, DLL: Lista Duplamente Encadeada, A: Adição de Polinômios, SM: Matrizes Esparsas, Rep: Representação, Op: Operação, In: Inserção e Del: Remoção

Figura 13: Fragmento da rede sobre Listas Encadeadas.



Fonte: (NOUH; KARTHIKEYANI; NADARAJAN, 2006)

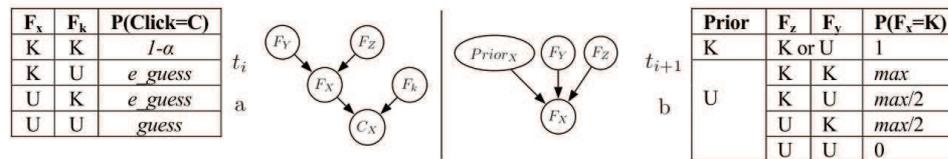
estados: *Mastery* (M), *Partial Mastery* (PM) e *Non-Mastery* (NM). Na relação entre um nodo K e seus pré-requisitos, é definido um grau de importância w_i , que representa o quanto o conceito é importante para a compreensão do nodo sucessor.

5.2.4 Matemática

O Prime Climb é um jogo educacional (MANSKE; CONATI, 2005) voltado para a prática de fatoração de números inteiros. Ele consiste em o jogador e seu parceiro escalarem montanhas, que são compostas por blocos contando números. O objetivo é chegar no topo da montanha e para isso o jogador e seu parceiro devem escalá-la pareando blocos de números que não possuem fatores em comum. Ao realizar esses passos, o aluno pratica 3 habilidades: (i) a fatoração do número em que o jogador está, (ii) a fatoração do número em que o parceiro está, e (iii) o conceito de fator comum entre os dois números.

O jogo contém 11 modelos de aluno, um para cada montanha, modelados através de redes Bayesianas Dinâmicas. Elas recebem um novo *time slice* a cada movimento do aluno; dessa forma, o menor modelo de aluno possui 23 nodos e o maior possui 131. Com relação aos nodos, cada modelo é composto, na sua maioria, por nodos binários: (i) Nodos de Fatoração (F_x), que representam a probabilidade do aluno saber a fatoração de x , (ii) Nodo de fator comum (CF), que representa a probabilidade do aluno ter compreendido o conceito da fatoração comum entre os números, e (iii) $Prior_x node$, que representa a probabilidade do aluno saber a fatoração de x no *time slice* anterior. Um nodo de clique $Click_{xy}$ é adicionado temporariamente, criando uma estrutura causal com os nodos CF , F_x e F_y , cuja evidência é apresentada em $Click_{xy}$.

Figura 14: Rede Bayesiana do Prime Climb



Fonte: (MANSKE; CONATI, 2005)

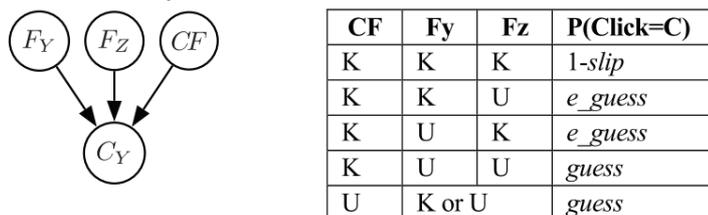
O modelo possui 4 parâmetros: *Slip* ou parâmetro α , que define a probabilidade do aluno errar mesmo dominando todos os conceitos; *Guess* que define a probabilidade de acerto quando nenhum conceito é conhecido; *Edu-Guess* define a probabilidade do aluno realizar um acerto não dominando completamente todos os conceitos; e *Max*, um coeficiente aplicado na fórmula $Max \times \frac{P_k}{P}$ que define a probabilidade do aluno realizar um movimento correto, dado o número de conceitos compreendidos (CONATI; DAVOODI, 2013). A variável P representa o número de pais de F_x , e P_k é o número destes pais que são conhecidos pelo aluno.

Na Figura 14(a) é ilustrada a rede implementada conforme (MANSKE; CONATI, 2005). Observa-se a diferença entre os parâmetros *Guess* e *Edu-Guess*, no qual o primeiro refere-se, exclusivamente, à situação em que não há diagnosticado nenhum conhecimento prévio, e no segundo há ao menos um conceito compreendido. Também destaca-se o nodo $Prior_x$ (Figura 14(b)), em que basta que o mesmo assuma o valor “conhecido” (K) para que F_x também o seja. Isso ocorre uma vez que $Prior_x$ é o conhecimento prévio de F_x , e a rede não modela a probabilidade de o aluno esquecer o conteúdo (MANSKE; CONATI, 2005).

Para a definição das probabilidades do modelo, foi utilizado dados de pré e pós-testes de 52 alunos. Através desses dados, por uma análise de frequência, os parâmetros acima foram obtidos. Através de uma validação cruzada (*10 fold*), foi obtido o valor do limiar que considera que o aluno aprendeu ou não. Este valor foi de 0,8 e foi o limiar em que o modelo apresentou uma melhor acurácia (de 0,772).

Uma outra avaliação foi realizada alterando as probabilidades *a priori*. Foram utilizados valores *default* (0,5), valores individuais obtidos nos pré-testes e valores derivados da frequência dos pré-testes. Os valores individuais obtiveram melhores resultados, com acurácia de 0,828 contra 0,717 do modelo com valores *default*, e 0,776 de valores de frequência.

O nodo Fator Comum (CF) foi adicionado posteriormente, uma vez que a sua adição aumenta a complexidade do modelo. Se o aluno não domina esse conceito, qualquer outra probabilidade da tabela é definida pelo parâmetro *Guess*, conforme mostra a Figura 15. No entanto, a nova rede não apresentou melhoras de acurácia. Uma possível causa apresentada, seria a pequena quantidade de dados.

Figura 15: Rede Bayesiana do Prime Climb com o nodo de Fator Comum

Fonte: (MANSKE; CONATI, 2005)

5.3 Pré-Requisitos a um Modelo de Aluno

O trabalho de (CARMONA et al., 2005) propõe a extensão do Modelo de Aluno do ambiente MEDEA, uma plataforma para desenvolvimento de ambientes de aprendizagem via Web. Este componente é composto por dois módulos: o **modelo de atitude**, que armazena as informações afetivas, estilos de aprendizado e preferências; e o **modelo de conhecimento**, responsável por armazenar e inferir o que o aluno sabe sobre o domínio. Esse último processo é realizado por uma rede Bayesiana (TRELLA; CARMONA; CONEJO, 2005).

Em (CARMONA et al., 2005) é proposta a adição de uma camada extra à rede Bayesiana de modo a incluir pré-requisitos aos conceitos aprendidos. Esses pré-requisitos permitem organizar melhor o currículo, bem como uma inferência mais detalhada sobre o conhecimento do aluno.

Relações de pré-requisitos são úteis ao modelar um domínio, não só por serem comuns nos ambientes educacionais, mas também porque eles podem servir de guia para importantes ações instrucionais como a adequação de sequenciamentos de currículo, seleção de foco instrucional, geração de exercícios adaptados, etc., e, não menos importante, porque eles fornecem informações úteis sobre o estado do conhecimento do aluno, o que não pode ser ignorado (CARMONA et al., 2005, p. 350).

Na implementação deste modelo, foram definidas quatro camadas:

- **Camada Estimada:** Guarda informações relativas à interação do aluno, como páginas visitadas e tempo gasto em cada página.
- **Camada Avaliada:** Guarda informações obtidas de avaliações.
- **Inferida pela camada de pré-requisitos:** A rede Bayesiana que possui as relações de pré-requisitos.
- **Inferida pela camada de granularidade:** Contém as relações de agregação, ou seja, nodos de conceitos compondo nodo de tópicos (conceitos que influenciam em tópicos).

Na definição das probabilidades de cada nodo de pré-requisitos, foi considerado o uso da dificuldade de cada requisito. Se todos os pré-requisitos necessitam ser satisfeitos, a probabili-

dade de conhecimento é d , quanto menor o valor mais difícil, caso contrário é $0 + \epsilon$, sendo ϵ o parâmetro de ruído (*noisy-AND*). Se não há necessidade de todos os pré-requisitos serem satisfeitos (*noisy-OR*), a probabilidade de conhecimento será de $0 + \epsilon$ quando nenhum pré-requisito for satisfeito, caso contrário será d .

Para esse modelo de pré-requisitos, foram realizados dois tipos de avaliação. A primeira constitui um teste qualitativo, para verificar a forma de raciocínio da rede. A segunda, com alunos simulados, visava verificar se a camada extra contribui positivamente para a capacidade de inferência da rede.

Na primeira avaliação, um modelo simples, descrevendo o mínimo múltiplo comum, foi utilizado. Evidências foram apresentadas à rede e o seu comportamento foi observado. Conforme os autores concluíram o teste, a rede pode ser utilizada para representar o estado de conhecimento do aluno, “pois eles (os requisitos) podem ser utilizados para adaptar os itens apresentados ao aluno, e portanto, os (itens) mais difíceis e os mais fáceis são evitados”.

Para a segunda avaliação, foi utilizado um modelo de 14 conceitos, agrupados por nível de dificuldade. Para essa rede, o parâmetro ϵ foi ajustado conforme a dificuldade da questão; quanto mais difícil a questão, menor o ϵ . Foram utilizados 4 grupos de alunos simulados: novato, intermediário, bom e especialista, cuja diferença está no número de conceitos que cada tipo de aluno “conhece”. Um total de 180 alunos simulados foi utilizado, 45 de cada tipo. Durante a simulação, cada questão foi sorteada. Para simular a resposta do aluno, um número foi gerado aleatoriamente. Se o mesmo estivesse dentro de um limiar, a resposta era considerada correta, caso contrário, incorreta. Para cada conceito C_i , a probabilidade $p_i = P(C_i|Q = q)$ foi computada, sendo $Q = 0$ se a questão foi considerada incorreta e $Q = 1$ para a questão correta.

A simulação encerrava-se quando o “aluno” tinha completado um total de 60 questões, ou quando todos os conceitos fossem avaliados. Na avaliação dos conceitos, se a probabilidade computada fosse maior que $1 - u$, com $u = 0, 2$, o conceito era diagnosticado como correto. Se fosse menor que u , o conceito era diagnosticado como incorreto. O conceito era diagnosticado como “não diagnosticado” para os outros valores.

Os resultados obtidos foram comparados com o “conhecimento” real de cada aluno, ou seja, os conceitos que foram previamente definidos para cada aluno simulado. Após, os conceitos considerados como “Sabe” e “Não Sabe” foram submetidos como evidências à rede, a fim de obter o diagnóstico através da abordagem de pré-requisitos. O resultado da rede também foi comparado com o “conhecimento” real de cada aluno. Os dois resultados, então, foram comparados.

Os resultados mostraram uma melhora no diagnóstico dos conceitos. Os conceitos classificados como “Não Diagnosticado” caíram em 6,27%. Os corretamente classificados aumentaram de 89,29% para 94,4%, e os incorretamente classificados foram de 1,43% para 2,58%.

5.4 Análise dos Trabalhos Relacionados

Neste capítulo foram apresentados trabalhos relacionados à modelagem de aluno através do uso de redes Bayesianas. A Tabela 3 resume as características dos trabalhos relacionados de acordo com alguns critérios estabelecidos, relevantes à comparação com o trabalho proposto. Na Tabela 3, as colunas representam cada um dos trabalhos relacionados. Os critérios comparativos usados estão descritos nas linhas da tabela; são eles: (i) domínio sendo modelado pela rede; o(s) tipo(s) de conhecimento(s) do domínio empregado(s) na estrutura, como: (ii) os conceitos fundamentais de cada domínio (conhecimento declarativo), (iii) o conhecimento procedural e (iv) o emprego das principais falsas concepções do estudante; (v) o tipo de evidência utilizado pelo modelo para a inferência: as tarefas resolvidas pelo aluno ou as etapas de cada tarefa; (vi) se o modelo estabelece relações entre o conhecimento procedural (operações), o declarativo (conceitos) e as falsas concepções; (vii) se o modelo é independente de problema, ou seja, o mesmo modelo de inferência pode ser aplicado em problemas diferentes, e (viii) a forma como cada trabalho realiza a inferência do conhecimento dos estudantes: se é através de Redes Bayesianas tradicionais, Dinâmicas ou através de cálculos matemáticos.

Com relação ao item (i), assim como o presente estudo, os trabalhos de (MILLÁN et al., 2013) e (DUIJNHOVEN, 2003) são voltados ao domínio de álgebra elementar. Estes dois trabalhos se diferenciam pelo tipo de conhecimento empregado: o primeiro trabalho utiliza o conhecimento declarativo, e o segundo emprega o conhecimento procedural e as falsas concepções. Já o trabalho de (NOUH; KARTHIKEYANI; NADARAJAN, 2006) é voltado para o ensino de programação e estruturas de dados e o PrimeClimb (MANSKE; CONATI, 2005; CONATI; DAVOODI, 2013) é voltado para um conhecimento específico da Matemática, a fatoração de números inteiros. O *Knowledge Tracing* (CORBETT; ANDERSON, 1994; PARDOS; HEFFERNAN, 2010; YUDELSON; KOEDINGER; GORDON, 2013) e o estudo de (CARMONA et al., 2005) não estão voltados a uma área específica de conhecimento.

Para os tipos de conhecimento empregados (itens (ii),(iii) e (iv)) destaca-se que o trabalho desenvolvido utiliza tanto o conhecimento declarativo (conceitos algébricos), como o procedural (operações algébricas) e as principais falsas concepções observadas nos estudantes. Os demais trabalhos empregam apenas os conceitos (como (MILLÁN et al., 2013)), apenas as operações (*Knowledge Tracing* e (CARMONA et al., 2005)), a combinação de ambos ((NOUH; KARTHIKEYANI; NADARAJAN, 2006) ou utilizam apenas o conhecimento procedural e as principais falsas concepções do estudante (CONATI; DAVOODI, 2013)).

Em relação às fontes de evidências (item (v)), consideradas em cada trabalho: o *Knowledge Tracing*, o PrimeClimb e o presente trabalho utilizam as etapas das tarefas para realizar a avaliação, ou seja, os exercícios são decompostos em pequenas etapas e os modelos avaliam a (in)correta execução de cada uma dessas etapas. Completando corretamente cada uma, o estudante finaliza o exercício como um todo.

No quesito relação entre os conhecimentos (item (vi)), o trabalho de (MILLÁN; LOBODA;

CRUZ, 2010) apresentou uma abordagem descrevendo o domínio através de agregação de nodos de conceitos (C) e tópicos (T), em um nodo de assunto (S) que apresenta o desempenho geral do aluno. A utilização de agregação de conceitos permite uma rede mais organizada e eficiente devido às poucas conexões entre os nodos (PEARL, 1988). Tal abordagem também foi utilizada por (NOUH; KARTHIKEYANI; NADARAJAN, 2006), porém incorporando a precedência entre tópicos. Este conceito de agregação remete à questão da independência condicional, dado que uma vez que um tópico é conhecido, as probabilidades dos conceitos não são mais necessárias (RUSSELL; NORVIG, 2002). Em (CARMONA et al., 2005), este conceito de agregação também foi anteriormente utilizado para descrever uma relação de pré-requisitos na rede. Esta relação permite a separação de conceitos não relacionados entre si, o que faz com que o sistema possa verificar se o aluno é capaz de lidar com determinados exercícios, por exemplo, ao aplicar o *macroadaptation* para selecioná-los. No trabalho de (DUIJNHOFEN, 2003), também é empregada a agregação de conceitos, em menor escala, e incorpora as *misconceptions* dos alunos, sob a forma de nodos-raiz, de forma a prover uma explicação para os erros cometidos pelos alunos e auxiliar no diagnóstico de *guess* e *slip*.

Destaca-se, também, o item (vii), a independência de problemas, uma vez que é desejável na construção de um componente de inferência de conhecimento em um STI. Sendo independente de problemas, a rede não necessita de reestruturação a cada novo problema apresentado ao aluno. Isso é alcançado graças ao tipo de evidência empregado: as etapas de resolução de uma tarefa. Dado que cada problema exige um conjunto finito de conhecimentos para ser resolvido, somente aqueles conhecimentos aplicados (in)corretamente pelo estudante serão instanciados na rede.

Observam-se apenas três trabalhos que apresentam independência de problemas, o presente trabalho, o *Knowledge Tracing* e o PrimeClimb, sendo o último voltado para um domínio mais simples, com menos conceitos avaliados, o conceito de Fator Comum e o fato de o aluno conhecer os fatores comuns de x .

Quanto à estrutura de inferência empregada (item (viii)), é observado o uso de Redes Bayesianas e Redes Bayesianas Dinâmicas, sendo o último tipo observado em modelos que apresentam, de alguma forma, a independência de problemas.

Um fato interessante observado em todos os trabalhos são os parâmetros de *guess* e *slip* inclusos nos cálculos das probabilidades. O parâmetro *slip* é sempre incluso na probabilidade do aluno conhecer determinado assunto, dado que ele domina todos os conceitos relacionados. Já o parâmetro *guess* ou é considerado quando o aluno não domina algum conceito ou quando não domina nenhum conceito.

No que se refere à parametrização, em (CONATI; DAVOODI, 2013) é relatado o fenômeno de *degeneracy* em uma rede Bayesiana Dinâmica, algo a ser considerado ao se desenvolver um Modelo de Aluno, principalmente, no momento da definição das probabilidades desta rede. Já nos trabalhos de (CORBETT; ANDERSON, 1994; PARDOS; HEFFERNAN, 2010; YUDELSON; KOEDINGER; GORDON, 2013) é apresentado o *Knowledge Tracing*, uma técnica

que foi inicialmente puramente baseada em cálculos e posteriormente adaptada para uma Rede Bayesiana. Não utiliza a relação de pré-requisitos, mas unicamente regras individuais (conhecimento procedural). Os trabalhos mais recentes referentes ao *Knowledge Tracing* buscam individualizar esse modelo (BAKER; CORBETT; ALEVEN, 2008; PARDOS; HEFFERNAN, 2010; YUDELSON; KOEDINGER; GORDON, 2013), algo que é proposto como trabalhos futuros em outros estudos.

A utilização dos conceitos algébricos e das operações a serem exercitadas pelo alunos, de modo a avaliar o seu conhecimento, é o que caracteriza o principal diferencial deste trabalho. Uma vez que tal combinação não é encontrada nos trabalhos supracitados, com exceção do trabalho de Manske e Conati (2005), o qual aplica um nodo para representar o único conceito representado do domínio, o fator comum entre valores inteiros. No entanto, não aplica a precedência de conceitos, já que o domínio é simples.

O *Knowledge Tracing*, ou *Bayesian Knowledge Tracing*, avalia apenas o conhecimento procedural, e não estabelece relações de pré-requisitos. Já os trabalhos de (MILLÁN; LOBODA; CRUZ, 2010; DUIJNHOVEN, 2003) aplicam redes Bayesianas tradicionais para avaliar o conhecimento de cada aluno. A inferência é realizada através de nodos que representam cada exercício. A proposta, foi, através de redes Bayesianas Dinâmicas, implementar uma estrutura que fosse independente de exercício. Nessa estrutura, cada instante de tempo da rede (*time-slice*) correspondeu a um passo da equação.

Tabela 3: Tabela comparativa entre os trabalhos relacionados e o trabalho proposto

	Knowledge Tracing, 2013	Millán, 2013	Duijnhoven 2003	Nouh, et al 2006	PrimeClimb, 2013	Carmona, 2005	Trabalho Proposto
Domínio	Diverso	Álgebra elementar	Álgebra elementar	Programação	Matemática	Diverso	Álgebra elementar
Conceitos	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Sim
Operações	Sim	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
Falsas Concepções	Não	Não	Sim	Não	Não	Não	Sim
Evidência	Etapa	Tarefa	Tarefa	Tarefa	Etapa	Tarefa	Etapa
Relações	Não	Apenas Conceitos	Apenas Operações	Apenas Conceitos e operações	Apenas Conceitos e operações	Apenas Operações	Sim
Independência de problema	Sim	Não	Não	Não	Sim (poucos conceitos)	Não	Sim
Inferência	Cálculos/Rede Bayesiana Dinâmica	Rede Bayesiana	Rede Bayesiana	Rede Bayesiana	Rede Bayesiana Dinâmica	Rede Bayesiana	Rede Bayesiana Dinâmica

Fonte: Elaborado pelo autor

6 TRABALHO DESENVOLVIDO

Este capítulo descreve o desenvolvimento do trabalho proposto. Este consiste em um modelo probabilístico para inferir o conhecimento do estudante no domínio de álgebra, mais especificamente na resolução de equações de 1º grau. Este componente apresenta como principal diferencial a combinação do conhecimento procedural (as operações algébricas), com o conhecimento declarativo (os principais conceitos por trás destas operações), e as principais falsas concepções. Estes conhecimentos são todos representados em uma estrutura probabilística que é independente dos problemas (equação para o aluno resolver), permitindo que novos problemas sejam facilmente inseridos. Isso é importante, pois STI adaptativos precisam de um grande número de problemas para adaptar os exercícios ao conhecimento do estudante.

O domínio da rede proposta foi restringido às equações de 1º grau, uma vez que o domínio de álgebra é complexo, possuindo muitos conceitos e operações envolvidos. Incluiu-se também as principais falsas concepções dos alunos, o que acarreta um aumento na complexidade do modelo.

Adotou-se a estrutura de redes Bayesianas Dinâmicas para o desenvolvimento deste trabalho, pois são ferramentas poderosas para trabalhar com dados incertos, apresentando resultados promissores para modelagem de aluno (MANSKE; CONATI, 2005; PARDOS; HEFFERNAN, 2010; MILLÁN et al., 2013; YUDELSON; KOEDINGER; GORDON, 2013), conforme apresentado no capítulo 5. As RBDs também permitem representar a relação de dependência entre as variáveis, o que possibilita modelar a relação entre conceitos, operações e falsas concepções do domínio algébrico. Por exemplo, no domínio da álgebra, a propriedade distributiva é fortemente dependente da operação da multiplicação, uma vez que essa é uma propriedade da outra.

Uma outra vantagem do emprego de RBD é permitir modelar uma estrutura independente de problemas, permitindo que novas equações sejam inseridas como problemas para o aluno resolver sem que a rede precise ser reestruturada. Deste modo, no modelo dinâmico de RB, cada *time-slice* representa a aplicação de uma operação para resolver um passo da equação e recebe como evidência as operações empregadas, inferidas pelo sistema especialista do STI, pelo estudante para resolver o passo.

Deste modo, o modelo desenvolvido neste trabalho é específico para o domínio algébrico, pois o mesmo estrutura a relação entre os conhecimentos de álgebra e utiliza como evidências as operações algébricas e as suas principais falsas concepções. Este modelo, também, depende de um sistema especialista para a inferência das operações aplicadas pelos alunos.

Como estudo de caso, o componente de Modelo de Aluno proposto será integrado ao STI PAT2Math. O PAT2Math, descrito na seção 2.4, é um Sistema Tutor Inteligente que assiste os estudantes na resolução de equações de 1º e 2º graus. Atualmente, este sistema é composto, principalmente, por componentes que desempenham tarefas do *inner loop*, como o módulo especialista, a interface gráfica e o modelo de aluno. Estando, este último, em processo de

desenvolvimento, atualmente ele possui somente uma base de dados estruturada para armazenar o perfil dos alunos e as atividades por eles executadas.

Vale ressaltar que o STI PAT2Math é apenas um estudo de caso para a realização deste trabalho, uma vez que não conta com um modelo de inferência de conhecimento. No entanto, o modelo proposto pode ser empregado em qualquer STI do tipo *step-based* que possua um mecanismo de inferência das operações algébricas aplicadas pelos estudantes para resolução dos passos da equação. Geralmente, esse mecanismo é implementado como um sistema especialista em sistemas tutores do tipo *step-based*.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. A seção 6.1 apresenta o desenvolvimento do trabalho, apresentando todas as versões da rede até a versão atual. A versão corrente da rede é apresentada na subseção 6.1.3, que também descreve as principais falsas concepções encontradas na literatura e aquelas que foram observadas durante a experiência no colégio. Também é descrita a coleta de informações necessárias para o desenvolvimento da rede, na seção 6.2.

6.1 Etapas de desenvolvimento do trabalho

Para a elaboração da estrutura de Redes Bayesianas do modelo proposto, inicialmente, foi necessária a construção de um mapa conceitual para descrever as relações entre os conceitos e as habilidades do domínio algébrico. Adotou-se o mapa conceitual, pois essa ferramenta é de fácil compreensão por profissionais de outras áreas e também porque permite representar os principais conceitos e habilidades do domínio, assim como as suas relações. O mapa foi inicialmente definido por uma professora de matemática no Ensino Fundamental e Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

Nesse mapa, foram estabelecidas as relações entre as unidades de conhecimento e as operações algébricas, identificando relações de pré-requisitos: quais unidades de conhecimento devem ser compreendidas primeiramente para que seja possível a compreensão das seguintes. Por exemplo, a operação de soma de frações exige o conhecimento prévio da operação de mínimo múltiplo comum (MMC) que, por sua vez, exige o conhecimento das 4 operações fundamentais. Isso porque, para aplicar esse tipo de soma, deve-se, primeiramente, realizar o cálculo do MMC, que exige o conhecimento da multiplicação e da divisão. Uma vez calculado, o processo seguinte envolve a divisão deste MMC pelo denominador da fração e da multiplicação do resultado pelo respectivo numerador. Por fim, realiza-se a soma propriamente dita entre os valores dos numeradores.

Essa primeira etapa deu origem ao primeiro modelo de RB, chamada de **Rede I**, neste trabalho, a qual é descrita na seção 6.1.1. Estando essa primeira rede finalizada, foi realizada uma avaliação com o objetivo de verificar a sua acurácia. Essa avaliação contou com o auxílio de uma especialista, que é professora de matemática do ensino fundamental. Para tanto, selecionaram-se equações que foram trabalhadas em uma avaliação em papel, em sala de aula.

As equações foram analisadas e as operações necessárias para resolvê-las foram obtidas. Para cada uma dessas operações, um novo nodo foi inserido na rede, cada um com dois estados “Correto” e “Incorreto”. Após, foram analisadas cada uma das 5 equações resolvidas por 24 alunos, e a informação de cada operação foi entrada como evidência para a rede, o que emitiu um parecer geral: o quanto (porcentagem) o aluno conhecia do assunto “Equações de 1º grau”. Da mesma forma, a especialista emitiu um parecer para cada um dos alunos. Os pareceres finais da Especialista e da Rede foram comparados e se constatou uma similaridade entre os pareceres.

Em um segundo momento, a Rede I foi transformada em uma Rede Bayesiana Dinâmica, dando origem a **Rede II**, descrita na seção 6.1.2. Essa mudança consistiu na criação dos *time-slices* para representar a aplicação de uma operação para resolver um passo de uma equação. Esses *time-slices*, graficamente, representam uma cópia da Rede I na qual conecta-se ao próximo *time-slice* através dos arcos temporais, estabelecidos entre as operações e os nodos de evidência.

Estruturalmente, a Rede II é a Rede I, com a adição dos arcos temporais, e dos nodos que representam a aplicação das operações. Tais nodos são fixos, nessa segunda versão, e são instanciados quando o estudante aplica a operação correspondente, ao contrário da Rede I, em que os nodos eram inseridos quando necessário (podendo haver nodos diferentes para uma mesma operação), o que implicava na reestruturação da Rede I, ou seja, a sua estrutura variava conforme as equações que o estudante estivesse resolvendo. Cada equação era decomposta nas operações necessárias para resolvê-la, e todos os nodos que representam essas operações deveriam ser previamente inseridos.

Na RBD, cada *time-slice* representa o conhecimento do estudante, inferido pela rede, após o aluno ter resolvido um passo de uma equação. Por exemplo, na equação $4x = 2$, são necessários dois *time-slices*: um para o passo envolvendo a operação de princípio multiplicativo ($x = \frac{2}{4}$) e outro para a simplificação da fração ($x = \frac{1}{2}$). Porém, caso o estudante cometa algum erro ao resolver esta equação, serão necessários tanto *time-slices* a mais quanto o número de erros cometidos.

A transformação da RB simples para dinâmica é o que, principalmente, permite ao modelo probabilístico ser independente de problemas. Na Rede I, as evidências eram os próprios passos, ou seja, a aplicação das operações nos passos, que eram inseridas manualmente na rede. Por exemplo, para avaliar o conhecimento com a equação $4x = 2$ era necessário inserir na rede os nodos “Passo_PMult” e “Passo_SP” e instanciá-los corretamente, dependendo do desempenho do aluno. Caso houvesse uma operação incorreta, era necessário inserir nodos extras para representar que o estudante corrigiu e submeteu novamente um passo da equação. A rede possuía, então, nodos duplicados: um para representar a resposta incorreta e outro para representar a correção desta resposta. Dessa forma, para cada equação haviam tantos nós quanto o número de respostas submetidas pelo aluno. Além disso, esses nós de evidência eram ligados ao nó da equação que eles representavam, o que tornava a rede dependente das equações.

Caberá, então, ao sistema especialista notificar a rede de que uma operação foi aplicada cor-

retamente ou não, passando o valor “(in)correto” para o nó de evidência relacionado à operação envolvida. Por exemplo, para a equação $4x = 2$, suponha que o aluno forneceu como primeiro passo a equação $x = \frac{2}{4}$. Nesse caso, é criado um *time-slice* para esse passo, e o sistema especialista fornece como evidência o valor “correto” para o nó de evidência que representa a operação de princípio multiplicativo.

Foram realizadas novas avaliações da Rede II, e se observou que tinha um desempenho pior que a Rede I. De modo a obter um modelo mais condizente com a realidade escolar e um diagnóstico mais apurado por parte da rede, foram conduzidas entrevistas com professores de matemática. Através delas, constatou-se que o conhecimento procedural de álgebra (as operações) não é suficiente para a modelagem do conhecimento algébrico do estudante. Isso porque, em cada operação, há certos conceitos por trás de sua execução. Por exemplo, a *Operação Inversa* está embasada no conceito da Igualdade dos Termos, ou seja, ao se aplicar uma operação em um lado da equação, deve-se aplicar a mesma operação também no outro lado da equação, de modo a manter o seu equilíbrio.

Da mesma forma, é importante o tratamento das falsas concepções, uma vez que elas estão relacionadas tanto às operações quanto aos conceitos. Uma falsa concepção representa um conceito (ou operação) correto aplicado em situações incorretas (MATZ, 1982). Desse modo, na ocorrência de uma falsa concepção, será a operação ou o conceito por trás dela que não está totalmente compreendido. Por exemplo, na resolução $25 + 4x = 3 \rightarrow 25 + x = \frac{3}{4}$, os passos da *Operação Inversa* foram aplicados corretamente, porém, a restrição, que define que esta operação somente poderia ser aplicada caso a multiplicação $4x$ fosse o único termo no respectivo lado da equação, não foi totalmente compreendida.

Assim, a Rede II foi estendida de forma a incorporar, além das operações algébricas de 1º grau, os principais conceitos por trás delas, assim como as falsas concepções. Essa nova rede é chamada de **Rede III** e detalhada na seção 6.1.3. Incorporados os conceitos algébricos e as falsas concepções, foram realizadas entrevistas com professores de matemática de modo a validar a nova estrutura da rede proposta. Com base nelas, novos nodos foram adicionados à estrutura da rede, outros foram removidos ou realocados. Igualmente, novas entrevistas foram conduzidas de modo a obter probabilidades mais corretas para os relacionamentos entre os nós da Rede III. Isso envolveu o uso de questionários aplicados aos entrevistados.

Neste período, cerca de 59 alunos de duas turmas de 7ª série (8º ano) de uma escola de São Leopoldo utilizaram o PAT2Math durante 50 minutos semanais, durante 8 semanas, como parte da disciplina de matemática. A interação consistiu em resolver equações de 1º grau, organizadas em 9 planos de aula de acordo com o nível de dificuldade, ou seja, as equações dos planos iniciais compreendiam equações simples como $200 - x = 100$. Conforme o aluno avançava nos planos, as equações tornavam-se mais complexas, tal como $x + 3 = 2(x - \frac{1}{2})$. Importante salientar que os planos eram apresentados de forma sequencial, ou seja, todos os alunos, inicialmente, dispunham apenas do plano 1. Conforme iam completando um plano, o plano seguinte era liberado pelo sistema. Após as 8 semanas, os estudantes resolveram um

pós-teste a fim de determinar seu conhecimento.

Por fim, a rede concluída foi submetida a uma avaliação, na qual os dados das interações dos alunos com o PAT2Math foram usados como evidências à rede. Após, os resultados da inferência da rede foram comparados com os resultados do pós-teste aplicado aos mesmos alunos. Os resultados dessa avaliação estão descritos no capítulo 7.

Nas subseções a seguir, serão relatadas todas as etapas de desenvolvimento do modelo probabilístico proposto. Conforme explicado, teve o seu desenvolvimento inicial como uma rede Bayesiana, tendo sido posteriormente portada para a estrutura de rede Bayesiana Dinâmica.

6.1.1 A primeira rede - Experimentos iniciais

O primeiro passo no desenvolvimento deste trabalho foi verificar o comportamento de uma rede Bayesiana frente ao domínio algébrico. Para isso, uma primeira versão da rede foi elaborada. Seu foco foi descrever a relação de dependência entre as operações aplicadas em equações de 1º grau (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2013). A estrutura dessa rede foi baseada em um Mapa Conceitual, que foi elaborado através de um levantamento de informações, realizados por uma especialista, que é professora de matemática do Ensino Fundamental e Mestre em Educação em Ciências e Matemática.

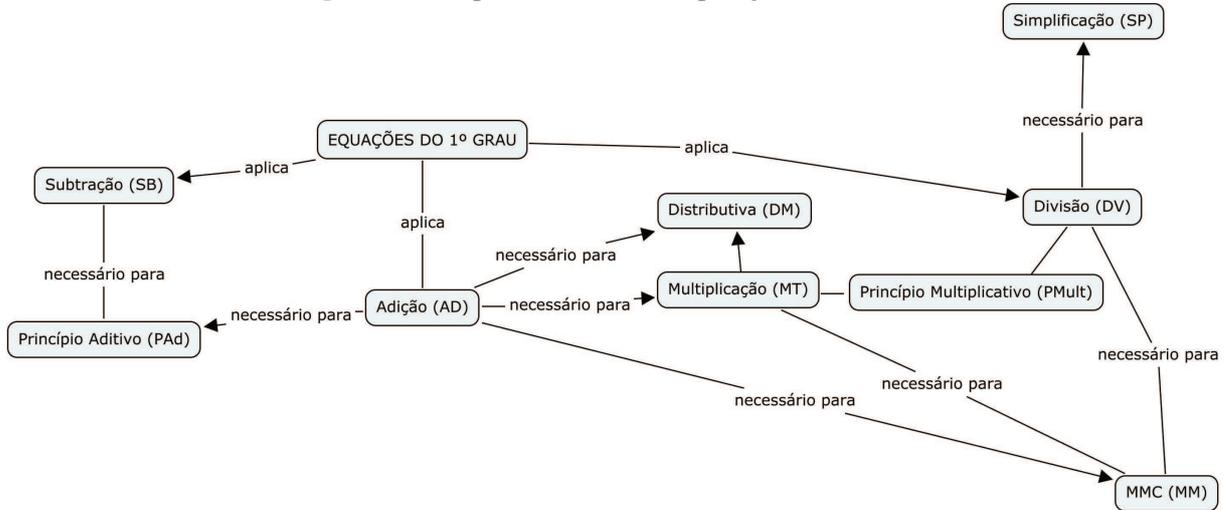
Mapas conceituais são diagramas que permitem organizar os componentes de conhecimento e representar a relação de dependência entre eles (FARIA, 1995). Essa estrutura é muito utilizada em atividades relacionadas à educação, como a estruturação de currículo escolar. Isso porque os mapas permitem a visualização das relações hierárquicas e dependentes entre os componentes de um conhecimento (MOREIRA; MASINI, 2011), mostrando as relações de subordinação e a superordenação entre os componentes. Tais características são úteis para a estruturação de uma rede Bayesiana.

O mapa desenvolvido está ilustrado na Figura 16; ele descreve a relação entre as operações aplicadas na resolução de equações de 1º grau. Essas relações indicam que uma operação interfere na compreensão da outra, ou seja, é necessária a compreensão de uma para que seja possível a compreensão da seguinte. Também pode indicar que a primeira é necessária na execução da segunda. Por exemplo, a divisão é aplicada na simplificação de frações, e a multiplicação é utilizada no cálculo do mínimo múltiplo comum (MMC).

Conforme observa-se neste mapa (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2013): (i) para um aluno saber multiplicar é necessário que saiba somar primeiro; (ii) para aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, o discente deve saber multiplicar e, conseqüentemente, adicionar valores; (iii) para calcular o MMC entre dois ou mais números, é necessário, ter conhecimento de adição, multiplicação e divisão; (iv) para aplicar os princípios aditivos e multiplicativos, o aprendiz deve saber adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Como é observado na Figura 16, somente adição, subtração e divisão não são dependentes de outras operações.

Definido o mapa, a rede foi estruturada utilizando dois tipos de nodos:

Figura 16: Mapa Conceitual de Operações de 1º Grau



Fonte: (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2013)

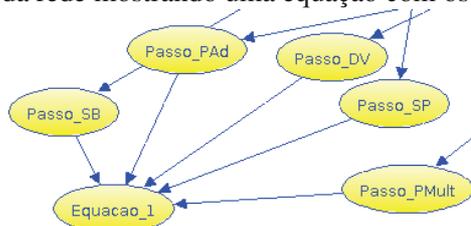
- **Nodo de Operação (*Operation nodes* (O)):** São os nodos que representam as nove operações de 1º grau, que estão ilustradas no mapa da Figura 16. Cada nodo possui dois estados, que indicam se o aluno domina ou não cada operação: *Mastered* e *Unmastered*. Estes são nodos não observáveis.
- **Nodo de Passo (*Step nodes* (S)):** Representam os passos aplicados para resolver uma equação. Estes nodos também possuem dois estados, que indicam se o estudante resolveu ou não o passo da equação corretamente: *Correct* e *Incorrect*. Estes são os nodos observáveis da rede, e recebem influência direta dos nodos de operação. Sua probabilidade é definida por $P(S|O)$, ou seja, a probabilidade de um passo assumir determinado valor dado o conhecimento, ou não, de determinada operação.

Para a definição das probabilidades entre os **nodos de operação**, adotou-se um processo similar ao descrito em (MILLÁN et al., 2013), que atribui um peso w_i para cada conceito. Desta forma, o cálculo da relação entre a operação O e as suas dependências O_i é realizado conforme a equação 6.1.

$$P(O|O_n \dots O_1) = \sum_{i \in I} w_i \quad (6.1)$$

Onde $I = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | O_i = \text{Mastered}\}$. Cada peso w_i foi definido de acordo com o grau de importância que a operação O_i exerce sobre a operação O . Por exemplo, a operação de MMC é dependente das operações de Adição, Multiplicação e Divisão, e os pesos destas operações são 10, 45 e 45, respectivamente. Isto porque, para aplicar o cálculo do MMC, é mais importante o conhecimento de multiplicação e divisão do que de adição, uma vez que tais operações são mais executadas ao realizar este tipo de operação. É importante ressaltar que a probabilidade máxima atribuída foi de 98%, uma vez que o modelo considera os 2% de chances

Figura 17: Fragmento da rede mostrando uma equação com os seus respectivos passos



Fonte: (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2013)

acertos por *guess* e erros por *slip*. Maiores informações sobre *guess* e *slip* podem ser obtidas no capítulo 4.

Nos **nodos de passo** (S), a probabilidade foi definida através da equação 6.2. Esta define que um determinado passo “S” poderá ser aplicado corretamente, se e somente, se o estudante compreender a operação “O”. Caso contrário, a probabilidade de compreensão é nula.

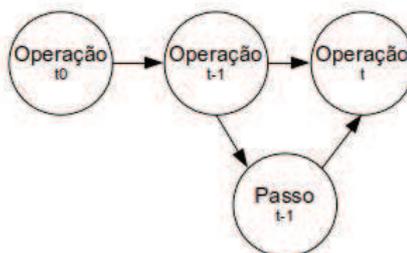
$$P(S|O) = \begin{cases} P(s|o) & = 1 \\ P(s|\neg o) & = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Para uma primeira avaliação foram selecionadas cinco equações resolvidas em sala de aula, que foram providenciadas pela especialista, e foram provenientes de uma avaliação parcial da disciplina de matemática, ministrada por ela. Cada uma destas equações foi inserida como nodos na rede, cada uma com os seus respectivos passos de resolução, como mostra a Figura 17. Também foi inserido um nodo “Equacao_1_Grau” que representou o desempenho geral do aluno, recebendo influência de todos os nodos de Operação.

O processo de avaliação visou comparar os resultados da especialista com os resultados da rede implementada. Desta forma, a especialista analisou a resolução de cada equação e emitiu um parecer. Este parecer representou o quanto cada aluno sabe sobre cada operação de 1º grau. O resultado de cada passo (correto ou incorreto) aplicado pelo estudante serviu de evidência para a rede. Neste caso, cada passo representou a aplicação de uma única operação algébrica, visto que os alunos resolveram estes exercícios sem omitir nenhuma operação. Após a propagação das evidências, um parecer final foi emitido pelo nodo “Equacao_1_Grau”.

Os pareceres da rede e da especialista foram comparados. A aplicação de um teste-t não pareado não mostrou diferenças significativas entre os resultados. A maior diferença entre o percentual da especialista e da rede foi de 6,79% e a menor foi de 0,01%. A média das avaliações da especialista para todos os alunos foi de 83,13%, e da rede foi de 83,39%, havendo apenas uma diferença de 0,26 para as 2 médias. Tais resultados mostraram-se promissores (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2013).

Figura 18: Relação temporal entre nodos de Operação e nodos de Passo



Fonte: Traduzido de (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2014), baseados em (REYE, 2004)

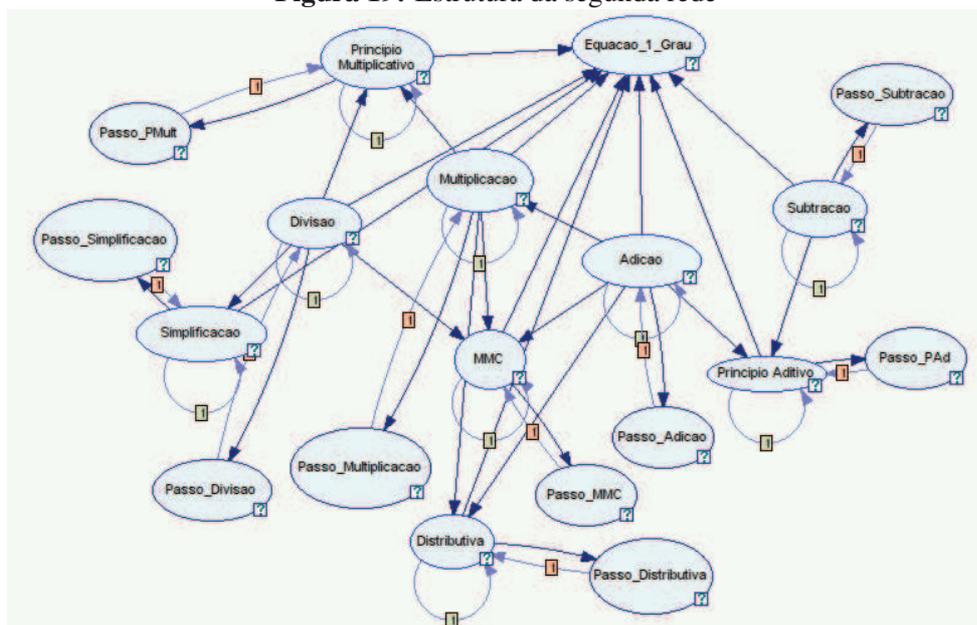
6.1.2 A segunda rede - A generalização

Tendo em vista a necessidade de generalização da rede para qualquer equação de 1º grau, a rede foi reestruturada na forma de uma Rede Bayesiana Dinâmica (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2014). Nessa nova estrutura, cada *time-slice* da rede representa o conhecimento do estudante inferido pela rede após ter sido entrado como evidência as operações aplicadas pelo estudante para resolver um passo em uma equação. Dessa forma, não há a necessidade de incluir nodos para representar cada exercício, como na rede anterior. As operações são obtidas durante a interação do aluno com o sistema: pela interface web, ele submete ao sistema a resolução de um passo da equação; o sistema, por sua vez, consulta o modelo cognitivo, que, através de um sistema especialista, identifica todas as operações aplicadas pelo aluno para resolver o passo; essas operações identificadas são, então, encaminhadas à rede e entradas como evidência. Para cada *time-slice*, um nodo de evidência correspondente à operação é instanciado, indicando operação correta ou incorreta.

Estruturalmente, a rede permaneceu fiel ao mapa conceitual, como a rede anterior (Figura 16). A única diferença foi a utilização de relações temporais, características das RBDs, entre os nodos de Operação, e entre os nodos de Passo (S_{t-1}) e a operação correspondente (O_t). Esta relação temporal está ilustrada na Figura 18. Por outro lado, a Figura 19 apresenta a rede modelada, cujos arcos temporais estão representados nesta figura com uma cor mais clara e acompanhados de um número inteiro. Este número indica que este arco exerce influência apenas no tempo $t + 1$; esta é uma notação empregada pelo software utilizado para modelar a rede, o GeNIe.

De modo a verificar a acurácia da segunda rede, foi aplicada a mesma avaliação à qual foi submetida a primeira rede. Porém, desta vez, para cada passo das equações, foi criado um *time-slice* novo (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2014). A avaliação desta nova rede mostrou uma diferença entre a rede e a especialista de no máximo 31,77% e no mínimo 5%. Isso se deve ao fato de a análise da especialista ocorrer na perspectiva de avaliação geral do estudante. Já a avaliação da rede ocorreu em uma perspectiva temporal, como um processo de aprendizado sequencial (evolutivo), no qual o início da resolução representa o início do processo de apren-

Figura 19: Estrutura da segunda rede



Fonte: Elaborado pelo autor

dizado e o último passo o final deste processo (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2014).

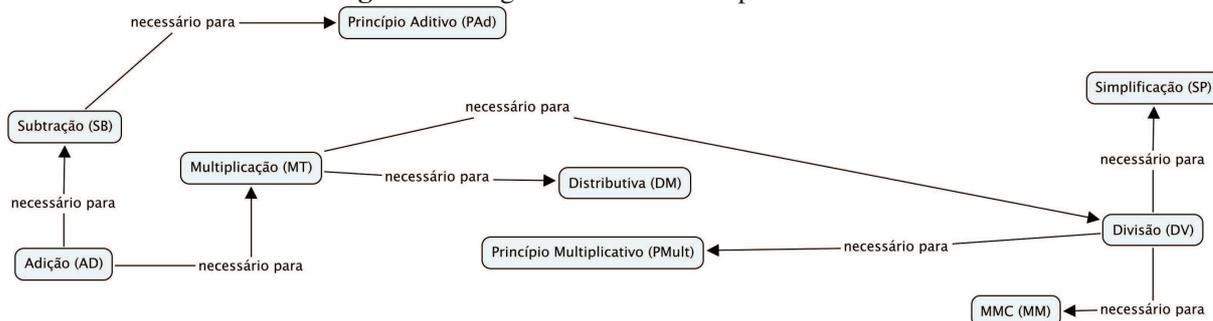
6.1.3 A terceira rede - Versão Final

Como descrito na seção 6.1.2, ao ser convertida em uma rede Bayesiana Dinâmica, a RB inicial tornou-se independente de problemas, porém, perdeu em acurácia. Visando aumentar a acurácia da RBD, foram realizadas novas entrevistas, desta vez, focadas no Mapa Conceitual que deu origem à estrutura da rede. As entrevistas foram conduzidas com dois professores, ambos de um programa de pós-graduação em computação de uma universidade do sul do Brasil. Ambos professores são bacharéis e mestres em matemática, um com doutorado em computação e o outro em ciência espacial. O primeiro possui 8 anos de experiência de ensino, na graduação (cálculo e cálculo numérico), e o segundo experiência de 22 anos, 1 ano no 1º grau, 4 anos no 2º grau e 17 anos no ensino superior.

O objetivo das entrevistas foi verificar a estrutura da rede e o relacionamento entre as operações. Também foi questionado sobre a força da influência dos conhecimentos anteriores, ou seja, dado que o aluno conheça determinadas operações, por exemplo, adição e multiplicação, o quanto isso influencia para ele saber aplicar a propriedade distributiva.

Como resultado dessas entrevistas, as seguintes informações foram obtidas:

- Se a adição influencia na multiplicação, e a multiplicação influencia na propriedade distributiva, então, não é necessário que a adição exerça influência direta na propriedade distributiva. Há uma relação transitiva. O mesmo se aplica para os princípios aditivo e multiplicativo e o MMC, como mostra a Figura 20. Desta forma, neste novo mapa é im-

Figura 20: Segunda versão do Mapa Conceitual

Fonte: Elaborado pelo autor

plementado o conceito da independência condicional das redes Bayesianas, apresentado no capítulo 3.

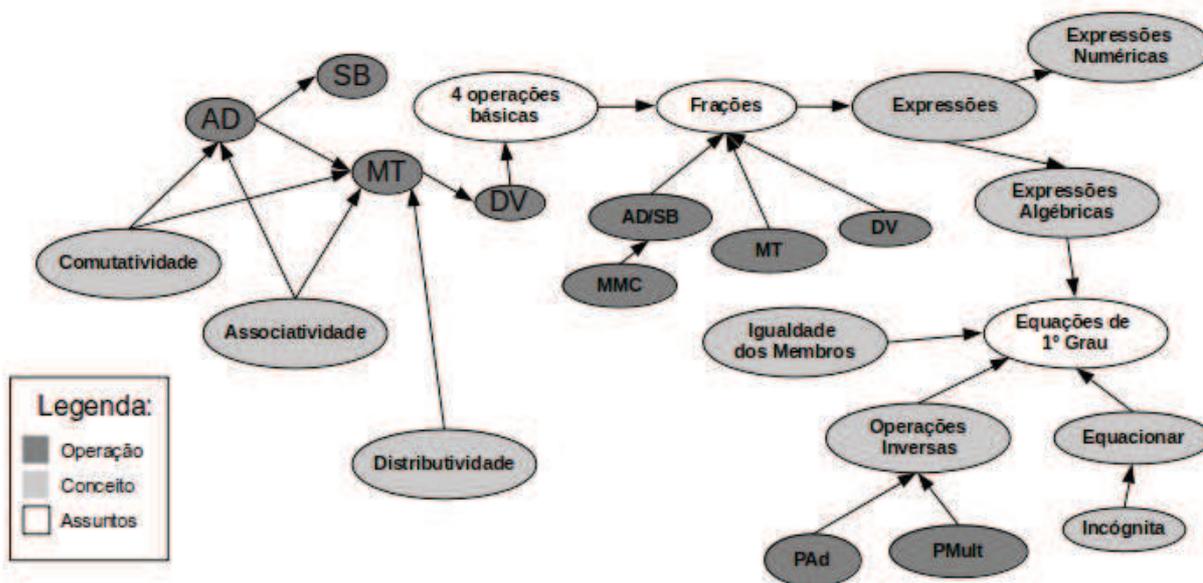
- A influência das operações antecessoras é mínima. Por exemplo, se o estudante sabe multiplicar não implica que ele tenha conhecimento da operação distributiva. Desta forma, foi perguntado aos dois entrevistados o quanto atribuiriam de probabilidade para este tipo de influência. As respostas foram valores baixos, com um teto de 0,5 na operação de simplificação. O que realmente influencia é a prática, através de atividades e exercícios.
- Foi mencionado um problema observado em sala de aula: a dificuldade dos alunos em compreender conceitos como: equação, igualdade, o princípio por trás da operação inversa.

Com base nestas entrevistas e nos trabalhos consultados, desenvolveu-se uma nova estrutura para a rede Bayesiana. Nesta nova estrutura, foram incluídas tanto as habilidades, as operações, como os conceitos algébricos. Espera-se com esta integração uma melhor capacidade de inferência por parte da rede. Uma vez que, conforme mostraram as entrevistas, para que o aluno aplique corretamente uma operação, não basta saber como aplicá-la, mas também compreender os conceitos por trás desta operação. Deste modo, espera-se também que a rede consiga mostrar quais conceitos o aluno não compreendeu totalmente.

Para auxiliar neste diagnóstico, foi incluso nodos que representam as principais falsas concepções do estudante. Isso porque há casos em que certos erros são causados por conceitos corretos aplicados em situações inadequadas (MATZ, 1982). Por exemplo, ao aplicar a operação de divisão, para simplificar a fração¹ $\frac{Ax+B}{x}$, ocorre de o aluno aplicar erroneamente esta operação, resultando em $A + B$. Segundo (MATZ, 1982), na introdução de novos conceitos e novas operações, é apresentada aos estudantes uma forma geral de como esta nova operação é aplicada (protótipo), no caso desta simplificação: $\frac{Ax}{x} \Rightarrow A$. Ao lidar com expressões mais complexas, como $\frac{Ax+B}{x}$, o aluno replica o mesmo procedimento aplicado ao protótipo. Isto deve-se a semelhança entre estas expressões, com o elemento a ser simplificado, presente tanto

¹ A e B são valores inteiros.

Figura 21: Terceira versão da estrutura da rede



Fonte: Elaborado pelo autor

no numerador quanto no denominador da fração. Porém, na segunda expressão, há a operação de soma que impede esta simplificação.

Da mesma forma que as redes anteriores, esta rede segue um modelo causal, cujos nodos-sensores são os passos da equação (já utilizados nas redes anteriores) e as principais falsas concepções identificadas pelo modelo cognitivo.

Na Figura 21, é apresentada a estrutura da nova rede. Esta apresenta conceitos baseados no mapa conceitual da Figura 20, e visa manter a relação de precedência entre os conhecimentos, ou seja, que conteúdos devem ser aprendidos primeiramente para que se possa estudar os conceitos mais avançados. Esse é o caso da operação algébrica MMC, que é necessária para a correta aplicação da soma e da subtração de frações, conforme ilustrado na Figura 21. Da mesma forma que a segunda rede, esta rede também adota uma estrutura temporal, na qual cada *time-slice* representa a aplicação (in)correta de uma operação de 1º grau. Mais detalhes serão apresentados na subseção 6.1.3.2 e na seção 6.1.4.

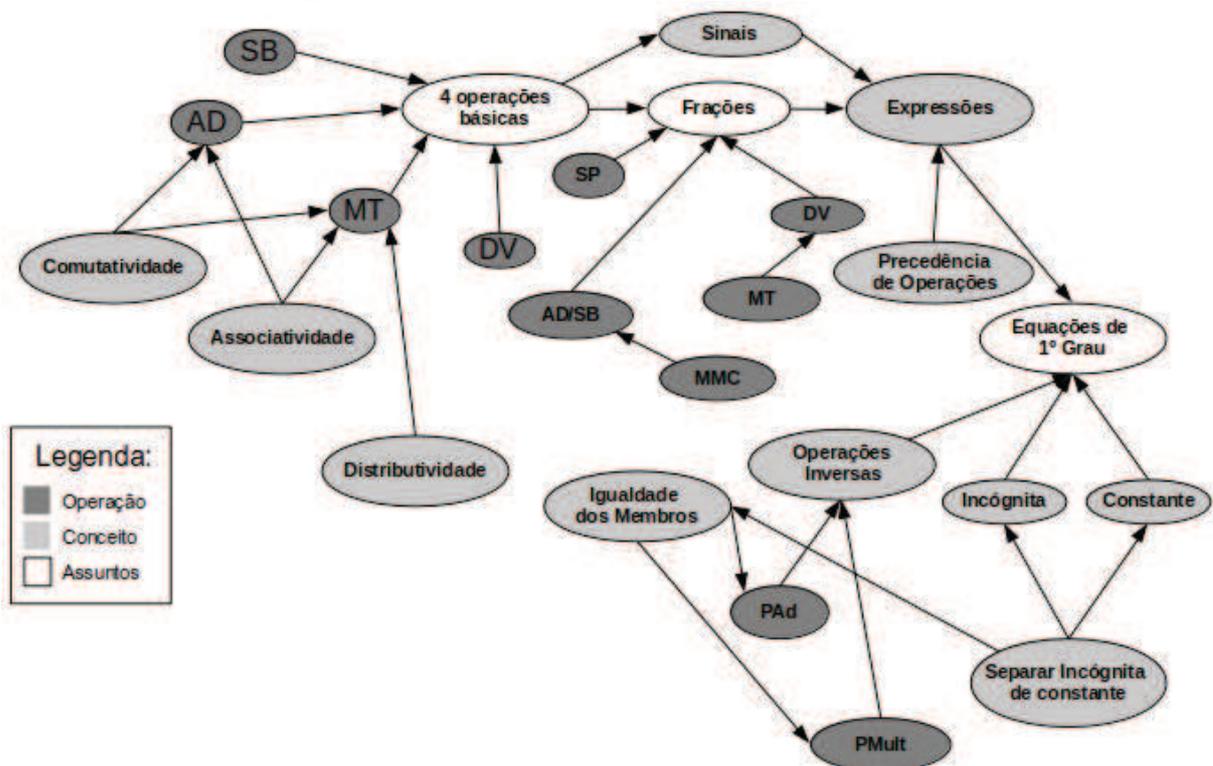
Uma vez definida a terceira estrutura desta rede, foram realizadas novas entrevistas individuais com quatro professores da área da matemática, todos com mais de 10 anos de docência (SEFFRIN; JAQUES, 2014), sendo que três deles atuam no ensino superior e um no ensino fundamental. A entrevista ocorreu da seguinte forma. Inicialmente, os entrevistados foram contextualizados sobre o uso da estrutura para mapear o conhecimento do aluno e a necessidade de estruturar o conhecimento algébrico. Em seguida, cada um analisou a estrutura proposta (Figura 21) e emitiu um parecer sobre a estrutura da rede. Isso incluiu comentários referentes às posições dos nodos, da necessidade de nodos extras e da remoção de outros que não eram necessários devido ou à dificuldade de inferência, ou por estarem fora do domínio algébrico de resolução de equações de 1º grau. Após as entrevistas, algumas alterações foram realizadas na

estrutura da Figura 21; tais alterações consideraram as sugestões dos entrevistados e resultaram na estrutura mostrada na Figura 22.

Uma das alterações mais notáveis foi a remoção das relações de dependência entre as 4 operações fundamentais, herança das primeiras versões da rede. Esta relação foi definida tendo em mente uma relação de ordem de aprendizado mas, como o público-alvo são turmas de 6º e 7º anos, que já possuem conhecimento destas operações, tal relação tornou-se irrelevante. Outra remoção aplicada foi a remoção dos nodos “Equacionar”, “Expressões Numéricas” e “Expressões Algébricas”, uma vez que, atualmente, não há evidências para sustentar tais probabilidades.

Também foram adicionados os seguintes nodos: (i) “Precedência de Operadores”, que possui como evidência a falsa concepção correspondente; (ii) o nodo “constante”; (iii) o nodo “Separar Incógnitas de constantes”, para unir incógnitas e constantes aos princípios aditivo (PAd) e multiplicativo (PMult); (iv) o nodo “Sinais”, suportado pela evidência da falsa concepção correspondente; (v) e o nodo “SP”, para a simplificação de frações, suportado pelos nodos-sensores correspondentes ao passo e a falsa concepção. Alguns nodos, também, trocaram de posição, como o nodo “MT” da multiplicação de frações, que passou a ser pré-requisito da divisão de frações, uma vez que a mesma é necessária para a divisão de frações; e o nodo “Igualdade dos Membros” que passou a ser pré-requisito dos princípios aditivo e multiplicativo.

Figura 22: Versão alterada de acordo com as entrevistas



6.1.3.1 Falsas Concepções

De modo a obter um diagnóstico mais preciso por parte da RBD, foram inclusas, no modelo, as principais falsas concepções observadas nos alunos. Tais concepções foram obtidas de três fontes distintas. A primeira foi através das entrevistas com os professores de matemática (SEFFRIN; JAQUES, 2014), os quais revelaram que os alunos apresentam grandes dificuldades em equações que (i) envolvem a operação inversa, (ii) a operações envolvendo os sinais positivo e negativo, (iii) a simplificação de sinais e (iv) a propriedade distributiva. A Figura 23 ilustra um exemplo de cada uma dessas falsas concepções citadas.

Figura 23: Exemplos de erros observados pelos entrevistados

(i)	$3x = 2 \Rightarrow x = 3 \times 2$
(i)	$x = \frac{2x}{2} + 4 \Rightarrow 2x = 2x + 4$
(ii)	$5 = 2x \Rightarrow \frac{5}{-2} = x$
(ii)	$3x + 4 = 2x + 5 \Rightarrow 3x + 2x = 5 + 4$
(iii)	$\frac{x+2}{2} = 3 \Rightarrow x = 3$
(iv)	$2 \times 3 \times x \Rightarrow (2 \times 3) \times (2x)$ $\Rightarrow 12x$

Fonte: Elaborado pelo autor

A segunda fonte de falsas concepções foi a literatura relacionada. Foram pesquisados artigos em conferências (*Conference of the Cognitive Science Society, International Conference for the Psychology of Mathematics Education*) e no periódico da área da matemática (*Journal of Mathematical Behavior*). Esses artigos reforçam as falsas concepções já constatadas através das entrevistas (KIERAN, 1988), e apontam outras falsas concepções. Em (BOOTH; KOEDINGER, 2008) são apresentadas as falsas concepções relacionadas à função do sinal de negativo e do sinal de igualdade. No que se refere ao sinal de negativo, o mesmo multiplicado por outro sinal de negativo torna-se positivo. Ainda, ao “mover um termo de um lado da equação para o outro”, deve-se aplicar a operação inversa em ambos os lados da equação. Foi observado que os alunos eram capazes de resolver corretamente a equação $x + 4 = 13$, porém, apresentavam dificuldades com a equação $x - 4 = 13$. Isso se deve ao fato de que eles tentavam resolver esta segunda equação da mesma forma que a primeira, ou seja, subtraindo o número 4 nos dois lados da equação. Em (BUSH; KARP, 2013), são apontadas outras dificuldades com relação ao sinal, por exemplo, ignorá-lo ao realizar as operações com os respectivos valores. Ao realizar a operação inversa, os estudantes alteram a operação e o sinal. Eles também apresentam dificuldades ao operar, por exemplo, $5 - (-7)$.

Quanto ao sinal de igualdade, a dificuldade está na compreensão do significado do mesmo, uma vez que este muda ao transitar da aritmética para a álgebra. Bush e Karp (2013) mencionam que os alunos consideram este sinal como um indício de “faça algo”, ou “a resposta é...”, ao

invés do seu significado de relação de equivalência entre os lados da equação.

A incógnita é outro termo algébrico em que os estudantes apresentam dificuldades, havendo casos raros em que ela é ignorada durante o cálculo (BOOTH; KOEDINGER, 2008). As maiores dificuldades com relação a este termo algébrico estão na compreensão do seu significado e na sua aplicação prática. Quanto ao seu significado, a dificuldade observada é em relação ao que ela representa, ou seja, valores desconhecidos, e que podem representar diversos valores (dependendo da equação), ou que duas incógnitas podem assumir valores iguais. Quanto à sua aplicação prática, é observada a soma incorreta entre números inteiros e incógnitas, ou ainda casos de concatenação de valores. Por exemplo, a equação $6 + x = 24$ é resolvida, incorretamente, como $6x = 24$, uma vez que tal propriedade pertence à multiplicação e não à adição (KIERAN, 1988).

A precedência de operações é outro assunto que causa certas dificuldades nos discentes. Segundo Bush e Karp (2013), há casos em que esta propriedade é ignorada, e os estudantes acabam por resolver a equação no sentido da esquerda para a direita, seguindo a ordem em que os operadores aparecem. Há casos em que eles ignoram a função dos parênteses. Por exemplo, a expressão $5 + 6 \times 10$ é resolvida, da esquerda para a direita, como $(5 + 6) \times 10 = 110$ ao invés de $5 + (6 \times 10) = 65$, ou na expressão $8 \times (5 + 7)$, cujos parênteses são ignorados, resultando em $(8 \times 5) + 7 = 47$, ao invés de $8 \times (5 + 7) = 96$. No entanto, segundo (KIERAN, 1988), este tipo de erro é mais comum em alunos que estão iniciando o aprendizado de álgebra.

Nas operações com frações, foi observado que a compulsão por tornar uma fração mais simples resulta em casos de simplificações impossíveis (BUSH; KARP, 2013), como a fração $\frac{3}{8}$ sendo simplificada para a fração $\frac{1}{4}$. Esta foi dividida por 3 e por 2, o que não é possível na operação de simplificação em que ambos os termos devem ser divididos por um mesmo termo em comum. Na soma de frações, os numeradores e denominadores são somados, em vez do procedimento correto que compreende a realização do cálculo do MMC, seguido das operações de divisão do MMC pelo denominador, e da multiplicação deste resultado pelo numerador da fração (BUSH; KARP, 2013). Na multiplicação de frações ocorre a multiplicação cruzada, ou seja, numerador de uma fração com denominador da outra, e o denominador com o numerador, características da divisão de frações. Foi observado também que, na divisão dos termos da fração, ou seja, $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$, o maior valor divide o menor, não importando a posição deles na fração (BUSH; KARP, 2013).

Por último, a terceira fonte das falsas concepções foram as observações realizadas durante as avaliações realizadas com os 59 alunos de duas turmas de 7ª série de uma escola de São Leopoldo. Enquanto eles resolviam as equações no PAT2Math, algumas falsas concepções foram levantadas nos arquivos de *log* do sistema, como a aplicação incorreta da regra da Operação Inversa. Nesta, o estudante transpunha o valor inteiro que acompanhava a incógnita para o outro lado da equação, tornando-o numerador da fração resultante. Desse modo, o valor inteiro já presente no lado oposto ao da incógnita tornava-se o denominador. Em outras palavras, o seguinte processo era realizado: $2x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{6}$. Tal falsa concepção também foi documentada

em (KIERAN, 1988).

Também foram observados erros com a simplificação de termos, na qual uma equação no estilo $ax = b$, sendo a e b números inteiros, era resolvida diretamente, sendo omitidas as etapas de operação inversa e/ou simplificação da fração. O erro, neste caso, foi que, ao informar a equação de resposta $x = c$, o valor c fornecido pelo estudante foi diferente do resultado correto esperado. Em alguns casos, isso resultava em diversas ocorrências de eventos de tentativa e erro, uma vez que o sistema retornava um *feedback* imediato, indicando a (in)validade da resposta. No entanto, tal comportamento não se trata de uma falsa concepção, mas sim de um comportamento conhecido como *Gaming the System* (BAKER; CORBETT; KOEDINGER, 2004). Este comportamento consiste em o aluno, de alguma forma, tenta burlar o sistema visando a alguma vantagem. Neste caso, o estudante tentava várias submissões de respostas aleatórias, sem tentar resolver o problema, visando um *feedback* positivo do sistema (BAKER; CORBETT; KOEDINGER, 2004).

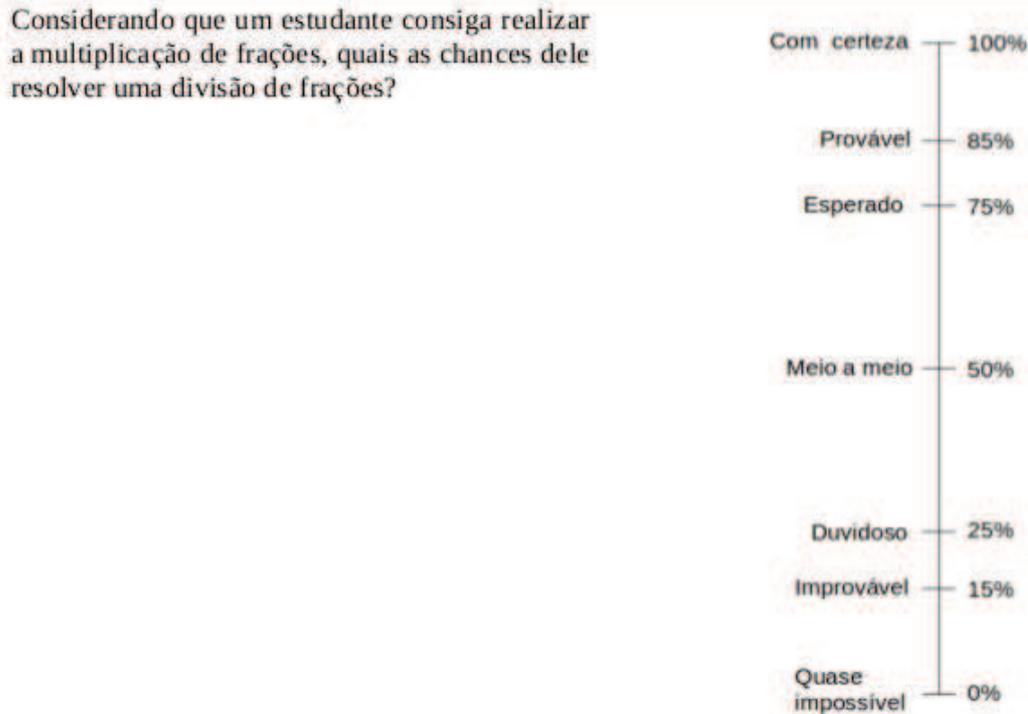
6.1.3.2 Probabilidades Condicionais

A estrutura da rede foi definida com seus nodos representando as relações entre os conceitos, as operações e suas propriedades, e complementadas com os nodos-sensores representando as evidências. Na rede proposta, é considerada uma evidência a aplicação correta de uma operação algébrica em um passo, ou a principal falsa concepção relacionada, no caso de um passo incorreto fornecido pelo estudante. Tais informações são obtidas do modelo cognitivo do sistema tutor, que utiliza um sistema especialista para identificar as operações aplicadas pelo aluno ao resolver um passo da equação. Este sistema especialista também é capaz de identificar as principais falsas concepções do estudante.

No Apêndice C, é possível visualizar a estrutura completa da rede. O próximo passo, então, foi definir as probabilidades condicionais do modelo, ou seja, qual a probabilidade de um nó assumir determinado valor, baseado nos valores dos nós relacionados a ele. No caso deste trabalho, a probabilidade define as chances de um aluno conhecer determinada operação, dados os pré-requisitos desta operação. Esses valores permitirão uma melhor inferência por parte da rede, no que se refere ao conhecimento do aluno.

De modo a obter esses dados, foram conduzidas entrevistas com três professores de matemática que atuam ou atuaram no ensino fundamental, com mais de cinco anos de experiência no meio. Para a entrevista, foi elaborado um questionário que visava obter as probabilidades necessárias para a rede. Indiretamente, as questões também visaram identificar a força da influência de certos conceitos nas respectivas operações. Tal questionário foi elaborado conforme descrito em (GAAG et al., 1999), que descreve uma metodologia para a obtenção de probabilidades com especialista na área. Esta faz uso de um questionário que apresenta ao entrevistado uma sentença que descreve uma situação a partir da qual se deseja obter os dados, e uma escala numerada que contém valores e expressões que representam as probabilidades desejadas. A

Figura 24: Fragmento do questionário aplicado com os professores



Fonte: Elaborado pelo autor, baseado em (GAAG et al., 1999)

Figura 24 ilustra um exemplo deste método. A questão ilustrada foi utilizada nestas entrevistas com os professores e se refere à probabilidade $P(DF|MF)^2$.

Esta escala, juntamente com as expressões verbais, auxiliaram os entrevistados “a melhor determinar a posição do intervalo que expressa a probabilidade que eles têm em mente” (GAAG et al., 1999). Tais questionários contribuíram para a definição das probabilidades condicionais entre as operações e seus conceitos e propriedades. O questionário utilizado para as entrevistas está disponível no Apêndice B, e os resultados desta entrevista são apresentados na subseção 6.2.1.

Desse modo, se um nodo K_0 recebe influências de diversos nodos K_i , então a sua probabilidade é definida pela equação 6.3, na qual w_i define a importância que o nodo K_i exerce sobre o nodo K .

$$P(K|K_1, K_2 \dots K_n) = \sum_{i \in I} w_i, I = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | K_i = \text{Knows}\} \quad (6.3)$$

No entanto, como esta rede adota uma estrutura temporal, outros parâmetros são necessários, uma vez que a equação 6.3 define apenas as probabilidades condicionais no tempo t_0 , em que não há influência temporal. A modelagem temporal dessa rede, assim como da rede anterior, está baseada no trabalho de (REYE, 2004). Ele apresenta uma modelagem do “*Knowledge*

²DF= Divisão de Frações e MF= Multiplicação de Frações.

Tracing” através de uma rede Bayesiana Dinâmica. Para tanto, exige a definição das seguintes probabilidades ou parâmetros:

- $P(L_{n-1}) = O$ conhecimento atual do aluno
- $P(O_n|L_{n-1}) = A$ chance de o aluno acertar um passo, uma vez que ele conheça o assunto.
- $P(O_n|\neg L_{n-1}) = A$ chance de o aluno acertar um passo, uma vez que ele não conheça o assunto.
- $P(L_n|L_{n-1}, O_n) = A$ chance de o aluno conhecer determinado conteúdo, dado que ele já conhecia este conteúdo e respondeu corretamente o passo, ou seja, a sua **taxa de lembrança** - $\rho(O_n)$.
- $P(L_n|\neg L_{n-1}, O_n) = A$ chance de o aluno conhecer determinado conteúdo, dado que ele não conhecia este conteúdo antes e ele respondeu corretamente o passo, ou seja, a sua **taxa de aprendizado** - $\lambda(O_n)$.

Além desses parâmetros, este trabalho também adota os outros parâmetros do *Knowledge Tracing*: o conhecimento inicial do aluno (L_0); a taxa de transição do estado “não sabe” para o estado “sabe” ($P(T)$), que é representado pela **taxa de aprendizado** nos parâmetros acima; a taxa de acerto “por sorte” ($P(G)$) e a taxa de erro por falta de atenção ($P(S)$).

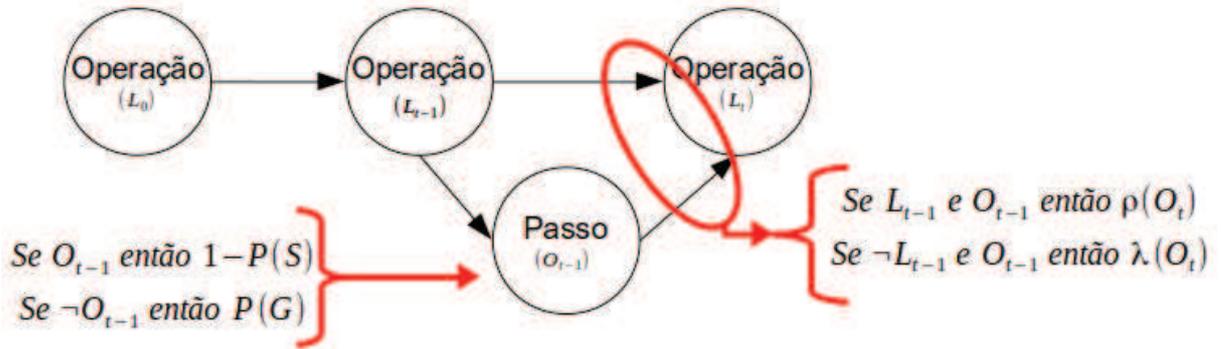
As probabilidades condicionais nos tempos de t_1 a t_n são definidas pela equação 6.4, cujos valores de $\rho(O_n)$ e $\lambda(O_n)$ são parâmetros pré-definidos. É importante destacar que é possível criar um modelo que desconsidere as chances de o aluno esquecer o conteúdo; para isso ajusta-se o valor do parâmetro $\rho(O_n)$ para 1.

A Figura 25 ilustra parte da estrutura temporal desta 3ª rede. Ela representa a relação entre uma operação e o seu respectivo nodo de evidência ao longo do tempo t . Em um determinado tempo $t - 1$, o conhecimento do aluno (L_{t-1}) influenciará na capacidade de ele resolver (in)corretamente o passo (O_{t-1}). Da mesma forma, a (in)correta resolução desse passo irá influenciar na sua capacidade de reter essa informação no tempo futuro t , modelando, assim, as taxas de lembrança ($\rho(O_n)$) e aprendizado ($\lambda(O_n)$), apresentadas anteriormente.

A outra parte, não representada na figura, se refere aos arcos temporais que os conceitos estabelecem consigo em t_{n+1} . Essa relação é necessária para que a informação do conhecimento de cada conceito não se perca a cada novo *time slice*. Desse modo, essa rede estabelece dois tipos de relações temporais: (i) relações entre operações e passos, e (ii) relações entre conceitos.

No entanto, mais dois parâmetros foram necessários para representar a força que os requisitos exercem sobre um nodo: (i) um parâmetro para operações e (ii) outro para conceitos. Tais parâmetros foram utilizados para limitar o crescimento da probabilidade dos nodos com o passar dos *time-slices*, uma vez que o conhecimento crescia sem haver evidências para suportar tal comportamento. A equação também considera os pré-requisitos. Caso os mesmos forem

Figura 25: Estrutura temporal de 3ª rede



Fonte: (REYE, 2004)

desconhecidos, as chances serão 0. Para ao menos um pré-requisito, é utilizada a equação a seguir (Equação 6.4).

$$\begin{aligned} P(L_n|L_{n-1}, O_n) &= \rho(O_n) \times R \\ P(L_n|\neg L_{n-1}, O_n) &= \lambda(O_n) \times R \end{aligned} \quad (6.4)$$

Na Equação 6.4, R define a porcentagem de informação que será utilizada, dados os pré-requisitos conhecidos, e é definida pela Equação 6.5. S_t (*step*) define a importância dos passos para a definição da probabilidade, onde $S_t = 1 - Req_{st}$. Req_{st} (*Requisite Strength*) é o parâmetro que define a influência dos pré-requisitos, sejam conceito ou operações. Já a variável R_p (*Requisite Percentage*) define a contribuição dos pré-requisitos conhecidos (porcentagem), ou seja, $\frac{\text{peso_dos_pre_requisitos_conhecidos}}{\text{peso_total_dos_pre_requisitos}}$.

$$R = S_t + ((R_p) \times Req_{st}) \quad (6.5)$$

Na relação temporal entre conceitos, a probabilidade foi definida pela Equação 6.6.

$$P(L_n|L_{n-1}) = \rho(O_n) \quad (6.6)$$

As probabilidades dos nodos sensores, Passo (O_n) e Misconception (M_n) (abreviada no modelo para Misc), tomam como base as taxas $P(G)$ e $P(S)$, conforme ilustra a equação 6.7.

$$\begin{aligned} P(O_n|L_{n-1}) &= 1 - P(S) \\ P(O_n|\neg L_{n-1}) &= P(G) \\ P(M_n|L_{n-1}) &= P(S) \\ P(M_n|\neg L_{n-1}) &= 1 - P(G) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Na definição dos valores destes parâmetros, a rede foi configurada com os seguintes parâmetros: $P(L_0) = 0,5$, $\lambda(O_n) = 0,2$, $P(G) = 0,3$ e $P(S) = 0,1$. Para $\rho(O_n)$ foi utilizado o valor de 0,99, um valor que permite à rede propagar o conhecimento através dos *slices*, com um número mínimo de perdas. $P(G) = 0,3$ e $P(S) = 0,1$ foram configurados com valores

comumente utilizados na literatura (BAKER; CORBETT; ALEVEN, 2008). O valor inicial de $\lambda(O_n)$ foi o valor utilizado por (REYE, 2004), no entanto, como a rede recebe influências dos pré-requisitos, ao utilizar o valor de 0,4, o conhecimento apresentou uma taxa elevada de crescimento a cada *time-slice*. Deste modo, optou-se por utilizar a metade deste valor, que demonstrou um comportamento aceitável.

6.1.4 Funcionamento da Rede

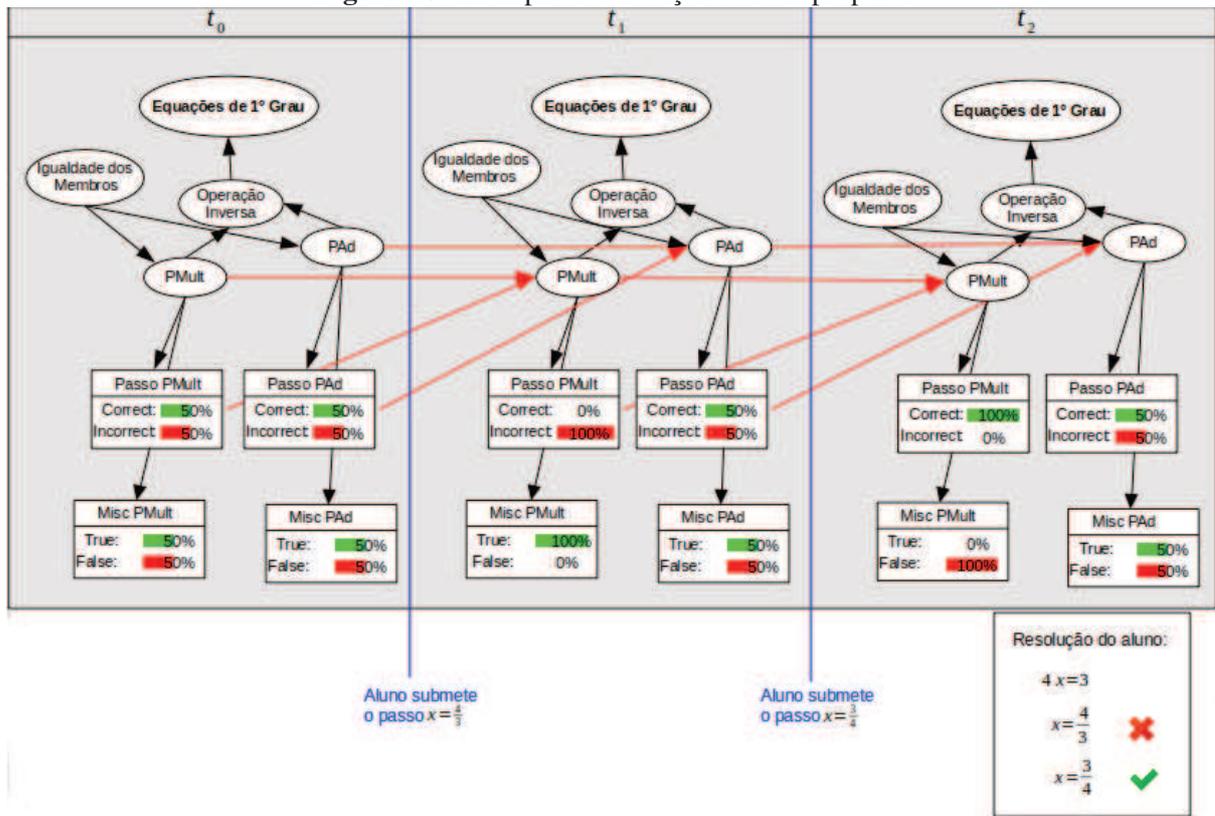
O funcionamento da rede baseia-se na interação do aluno com o sistema, durante o *inner loop*. No *inner loop*, uma equação é apresentada para o aluno resolver passo-a-passo. Cada passo de resolução submetido pelo aluno é repassado ao Modelo Cognitivo do STI para verificação. Este componente utiliza um sistema especialista para verificar se o passo está correto e, também, identifica quais operações foram aplicadas para resolvê-lo. No final de sua execução, é retornado um *feedback* simples, acompanhado, ou não, de um *error feedback*, que contém a informação de qual falsa concepção foi identificada, em caso de erro. Esta última, também é identificada pelo sistema especialista.

Os retornos obtidos do Modelo Cognitivo são, então, entrados como evidência na rede, em um determinado *time slice* t . Essas evidências podem ser: (i) qual operação foi aplicada, (ii) se esta está correta, ou não, e (iii) em caso de operação incorreta, qual foi a falsa concepção detectada pelo sistema. Há casos em que o sistema não é capaz de detectar uma falsa concepção. Neste caso, o erro não é registrado na rede, uma vez que cada falsa concepção está relacionada a uma operação. Se o sistema não detecta uma falsa concepção, não há como relacionar o erro a uma operação. Ao final de uma resolução com s submissões de resposta, em t_s , será obtido o resultado da inferência da rede.

Este tipo de evidência, utilizando a (in)correta aplicação das operações, unido ao fato de ser um modelo Dinâmico, permite utilizar esta rede para avaliar qualquer equação de 1º grau. Isto é possível pois toda equação é resolvida através de um conjunto finito de operações, e o modelo dinâmico permite, em teoria, estender a rede para comportar este conjunto de operações. Logo, o que vai diferenciar de uma equação para a outra, será o número de *time-slices* utilizados e quais evidências foram repassadas a rede.

Para ilustrar esse processo, considere a equação $4x = 3$ como o exercício apresentado a um aluno, e a rede da Figura 26. O aluno fornece como resposta (passo) a equação $x = \frac{4}{3}$. Essa equação é repassada pela interface ao Modelo Cognitivo que retorna o *feedback* mínimo “Incorreto”, acompanhado do *error feedback* que indica a Falsa Concepção no principio multiplicativo (Misc_PMult), e a operação correspondente “PM”, que foi identificada como incorreta. Estes *feedbacks* são, então, repassados à rede. Em um *time-slice* t_1 , o nodo-sensor “Passo_PMult” será instanciado, indicando o estado “Incorrect” e o nodo “Misc_PMult” indicará a ocorrência da falsa concepção, através do estado “True”. Ao receber este *feedback* da interface do STI, o estudante corrige o seu passo e submete uma nova resposta: $x = \frac{3}{4}$. O Módulo Cognitivo

Figura 26: Exemplo de execução da rede proposta



Fonte: Elaborado pelo autor

recebe a nova equação $x = \frac{3}{4}$, retornando o *feedback* mínimo “Correct”, juntamente com a operação “PM”, identificada, agora, como correta. Na rede, em t_2 , o nodo-sensor “Passo_PMult” é instanciado, indicando o passo correto. O nodo da falsa concepção “Misc_PMult” também é instanciado com o valor “False”, indicando a não ocorrência da mesma. A resolução da equação, então, é encerrada, sendo que em t_2 estará representado o conhecimento atual do estudante inferido pela rede. O processo é o mesmo para qualquer equação; os passos supracitados irão se repetir até a conclusão da equação, com a diferença nas operações aplicadas. Dessa forma, a rede terá um total de *time-slices* igual ao número de respostas submetidas pelo aluno.

6.1.5 Interação com o Sistema Tutor

Finalizando uma tarefa de n passos, a rede terá em t_n o resultado da inferência do conhecimento do estudante. Este resultado é então salvo no banco de dados do STI. Ele possui, para cada aluno, os registros referentes ao conhecimento algébrico do estudante. Atualmente, esses registros são referentes à cada operação algébrica de 1º e 2º grau.

Cada registro é composto pelos seguintes campos:

- **id:** Um identificador único.
- **content:** A unidade de conhecimento, a operação algébrica.

- **percentage:** Um valor, em porcentagem, indicando o quanto o estudante conhece sobre esta unidade de conhecimento. Este é o valor inferido pela rede.
- **student_id:** O identificador único do estudante relacionado ao conhecimento.

Após a correção de cada passo, pelo sistema especialista do STI, e da propagação dos dados pela rede, os registros são atualizados. Essa atualização se refere à obtenção do percentual de conhecimento para cada operação de 1º grau, e será um valor entre 0 e 100%. Os valores são obtidos dos nodos da rede que representam essas operações.

Considere o exemplo da Figura 26, apresentada na seção 6.1.4. Ao final de t_1 e t_2 , os valores obtidos nos nodos “PMult” e “PAd” serão utilizados para atualizar os respectivos registros na tabela de conhecimento.

De posse desses valores, o STI terá uma estimativa sobre o que o aluno conhece do conteúdo. Essa estimativa corresponde a um valor entre 0 e 100% representando o grau de conhecimento do estudante para cada operação e conceito algébrico, assim como para as falsas concepções representadas na rede. Através dessas informações, o componente tutor pode conduzir ações pedagógicas, tais como selecionar os materiais instrucionais que melhor auxiliem o aprendizado do estudante, de acordo com a sua estratégia pedagógica, conforme apresentado anteriormente na seção 2.3.2.

Com relação ao STI PAT2Math, que é o STI no qual esta rede será integrada, esse conhecimento permitirá adaptar as dicas a cada estudante. Dessa forma, se o estudante demonstrar um certo conhecimento sobre determinada operação, as dicas serão mais abrangentes. Caso contrário, se o estudante não demonstrar conhecimento, as dicas serão mais focadas em explicar qual operação deve ser aplicada, conforme apresentado em (SEFFRIN et al., 2012). Esse conhecimento também será utilizado pelo componente tutor, permitindo o emprego de estratégias mais complexas, como o *macroadaptation* e o *mastery learning* para seleção de material instrucional (ver seção 2.3.2 para mais detalhes sobre estas estratégias). Atualmente, o PAT2Math emprega uma seleção mais simples de problemas ao aluno, a listagem de conteúdos.

6.1.6 Limitações da Rede

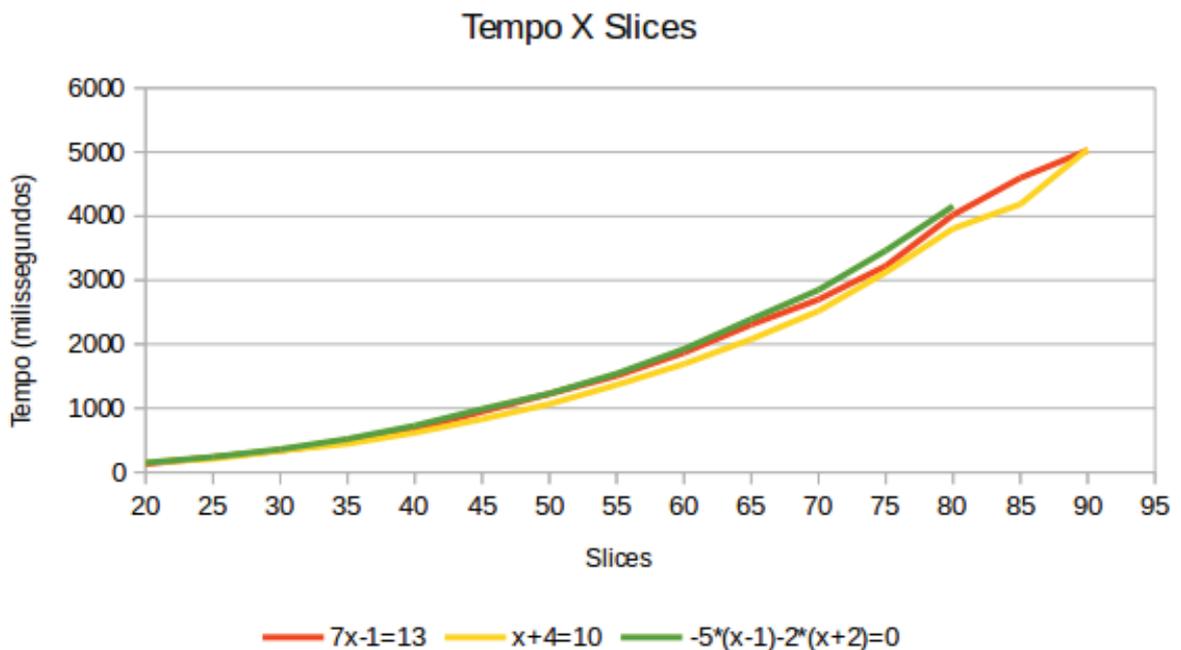
A rede implementada dispõe de, apenas, 20 *time-slices*, pois foi observado que o sistema especialista do PAT2Math utiliza menos de 20 passos para resolver uma equação. Uma vez que ele resolve da forma mais detalhada possível, esse valor se mostra apropriado. Além disso, essa restrição mantém o bom desempenho da rede, uma vez que redes com muitos *time-slices* tem o seu desempenho reduzido em comparação a versões desta mesma rede com menos *slices*. Se a rede deste trabalho utilizasse uma quantidade de *time-slices* igual ao número de operações aplicadas pelo aluno, após resolver várias equações, o seu tempo de resposta seria muito aquém do esperado.

Estando limitada a 20 *time-slices*, esta rede é, então, reiniciada a cada nova equação. Uma

vez que a inferência de uma equação é encerrada, as probabilidades presentes em t_n , no qual n se refere ao último *time-slice* utilizado, são salvas. Estes dados são repassados ao início da nova rede, através dos nodos iniciais, que são nodos utilizados para inicializar o conhecimento dos nodos em t_0 , presentes na parte temporal da rede (*temporal plate*), como mostra a Figura 28. As evidências presentes em t_n da antiga rede também são repassadas a nova rede e apresentadas em t_0 . Após a propagação, a rede está pronta para uma nova equação, cujas evidências serão apresentadas a partir de t_1 . A inicialização dos nodos iniciais ocorre por meio das evidências virtuais. **Evidências virtuais** são evidências em que não há 100% de certeza que dado evento irá ocorrer, portanto essas evidências são apresentadas com um certo grau de incerteza (PEARL, 1988). Da mesma forma, se uma equação ultrapassar os 20 *slices*, o processo será o mesmo de criar uma nova rede a ela.

O gráfico da rede da Figura 27 ilustra o desempenho da rede ao inferir o conhecimento de um estudante, utilizando os dados de três equações distintas, uma simples ($x + 4 = 10$), uma intermediária ($7x - 1 = 13$) e uma mais complexa ($-5 \times (x - 1) - 2 \times (x + 2) = 0$). Essa complexidade é definida pelo número de passos exigido para resolver cada uma delas. Elas foram selecionadas aleatoriamente do histórico dos alunos que utilizaram PAT2Math, durante uma avaliação realizada em uma escola de São Leopoldo, com duas turmas de 7^a série. Mais detalhes sobre essa avaliação serão abordados no capítulo 7.

Figura 27: Tempo requerido pela rede X o número de *time-slices*

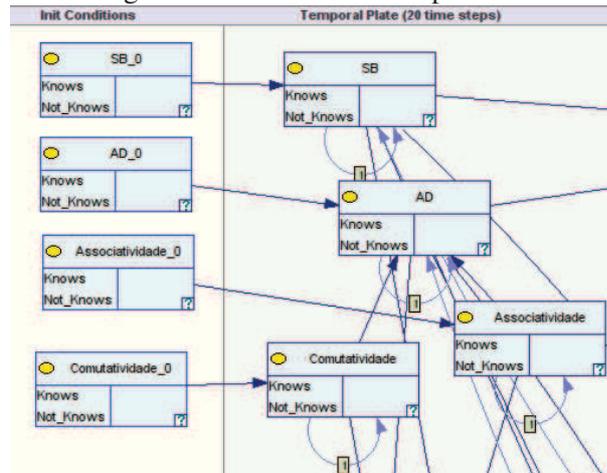


Fonte: Elaborado pelo autor

Cada valor do eixo X, do gráfico, representa o número de *time-slices* presentes na rede no momento da inferência, e no eixo Y estão os tempos, em milissegundos, que a rede levou para realizar o mesmo procedimento. Observa-se que, ao aumentar o número de *time-slices*, o

tempo de inferência aumenta consideravelmente. Esses dados foram obtidos através de sucessivas execuções da rede, para cada uma das equações. Iniciando em uma rede com 20 *time-slices*, as operações de cada uma dessas equações foram apresentadas à rede. Após, a rede foi incrementada em cinco *time-slices*, e o processo se repetiu. Caso o tempo de execução ultrapassasse o limite de 5 segundos, a equação era removida, e o processo se repetia com as equações restantes. O processo encerra quando todas as equações ultrapassarem o limite de 5 segundos.

Figura 28: Fragmento da rede com exemplos de nodos iniciais



Fonte: Elaborado pelo autor

6.2 Coleta de Dados

Nesta seção, são apresentadas as etapas da coleta de dados realizada para a composição da estrutura da rede. Elas compreendem as entrevistas realizadas durante o desenvolvimento do estudo, e o registro das interações de 69 estudantes que utilizaram semanalmente o sistema durante dois meses.

6.2.1 Entrevistas

Uma vez que a estrutura da rede foi concluída, o próximo passo realizado foi a definição das probabilidades condicionais de cada nó da rede. Conforme citado anteriormente, foram conduzidas entrevistas com três professores de matemática, todos com experiência no ensino fundamental, para este propósito. Para a realização destas entrevistas, foi elaborado um questionário contendo perguntas relacionadas a cada probabilidade requerida. De modo a facilitar as respostas dos entrevistados, cada pergunta estava acompanhada de uma escala numérica, que continha porcentagens e expressões textuais; este formato de questionário foi elaborado conforme descrito em (GAAG et al., 1999). Um exemplo de questão é mostrado na Figura 24 e se refere à probabilidade $P(DF|MF)$. As probabilidades obtidas com as entrevistas estão

organizadas na tabela 4³.

Tabela 4: Probabilidades obtidas com as entrevistas

Probabilidades	Professor 1	Professor 2	Professor 3
$P(MT AS, \neg DM, CM)$	15%	25%	50%
$P(MT \neg AS, DM, CM)$	25%	75%	85%
$P(MT AS, DM, \neg CM)$	50%	75%	85%
$P(AF MM)$	85%	85%	85%
$P(CoN SeP)$	50%	50%	50%
$P(InC SeP)$	50%	50%	50%
$P(AD \neg AS, CM)$	50%	75%	100%
$P(AD AS, \neg CM)$	25%	75%	100%
$P(SiN 4oP)$	75%	50%	50%
$P(DF MF)$	25%	25%	50%
$P(IG SeP)$	75%	50%	75%
$P(PA IG)$	75%	75%	50%
$P(PM IG)$	75%	75%	50%
$P(OI PA)$	85%	85%	50%
$P(OI PM)$	85%	50%	50%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essas probabilidades serviram de base para a configuração da rede em t_0 , e para os cálculos apresentados na subseção 6.1.3.2. Para a seleção de qual probabilidades utilizar, optou-se por aquelas com as quais os entrevistados concordaram, ou seja, por aquelas apontadas por mais de um entrevistado. Em caso de discordância, optou-se pelo maior valor de probabilidade.

³AD= Adição, MT=Multiplicação, DM=Propriedade Distributiva, PA=Princípio Aditivo, PM=Princípio Multiplicativo, OI=Operação Inversa, IG= Igualdade dos termos da equação, AS= Propriedade Associativa, CM=Propriedade Comutativa, AF=Adição e Subtração e Frações, MM=Mínimo Múltiplo Comum, DF=Divisão de Frações, MF=Multiplicação de Frações, CoN= Constante, InC=Incógnita, SeP=Separar inteiros de Incógnitas, SiN=Sinal Negativo, 4oP=4 Operações Fundamentais

7 AVALIAÇÃO

Neste capítulo, são apresentadas as avaliações realizadas para verificar a capacidade de inferência da rede desenvolvida. O primeiro passo para isso foi a obtenção dos dados para a realização da avaliação.

O STI PAT2Math foi utilizado por duas turmas de 7º ano, totalizando 59 alunos, de uma escola particular durante os meses de outubro e novembro de 2014. Uma vez por semana, todas as sextas-feiras, nas aulas de matemática, os estudantes se dirigiam ao laboratório de informática e acessavam o sistema para resolver equações de 1º grau durante 50 minutos. Cada submissão de resposta dos alunos foi registrada no banco de dados do sistema, bem como as inferências do sistema especialista quanto às operações aplicadas e falsas concepções identificadas.

Para a avaliação, as informações registradas, no banco de dados, foram organizadas em arquivos para posteriormente serem utilizadas na rede desenvolvida. Nesses arquivos, estavam listadas todas as operações que foram inferidas pelo sistema especialista; essas operações foram as evidências apresentadas à rede.

Passados os dois meses, na primeira semana de dezembro, os alunos resolveram um pós-teste. Os pós-testes foram analisados quanto à correta aplicação de cada operação algébrica.

No processo de avaliação da rede, os dados dos pós-testes foram comparados com as inferências da rede. Mais duas avaliações foram realizadas, empregando limiares, ou seja, se o percentual de um nodo da rede ultrapassasse este valor de limiar, então este nodo era instanciado, indicando que o aluno sabe este conceito ou operação. Os resultados da rede para os dois limiares foram, também, comparados aos dados do pós-teste.

7.1 Registro do log de interações

Como explicado anteriormente, no início do segundo semestre de 2014, o projeto PAT2Math conseguiu uma parceria com uma escola de São Leopoldo, para utilização do STI PAT2Math em sala de aula. Então, durante os meses de outubro e novembro, todas as sextas-feiras, duas turmas de 7º ano se dirigiram ao laboratório de informática para utilizar o sistema tutor. Essas turmas foram escolhidas porque o conteúdo de resolução de equações algébricas de primeiro grau é introduzido aos alunos no 7º ano. A interação consistiu em resolver equações de 1º grau, durante 50 minutos (um período de aula).

As equações trabalhadas no tutor foram fornecidas pela própria professora de matemática e estavam organizadas em planos de aula, totalizando nove planos de aula. Cada plano possuía um número variável de equações. Os planos também possuíam um nível de dificuldade, sendo que os planos iniciais apresentavam equações mais simples de serem resolvidas, e os finais equações mais complexas. Os estudantes iniciavam no plano 1 e, à medida que eles finalizavam um plano (resolviam todas equações daquele plano), o sistema liberava um plano novo. Devido a isso e ao pouco tempo que os estudantes dispunham, aproximadamente 50 minutos semanais, poucos

conseguiram liberar o plano 9. Durante todo o tempo em que foi utilizado o PAT2Math na escola, sempre houve ao menos um membro do projeto presente no laboratório de informática, de modo a auxiliar a professora caso o sistema apresentasse algum problema, uma vez que se encontra em fase Beta (fase de testes).

De modo a utilizar os dados dessas atividades no colégio, para avaliar a capacidade da rede desenvolvida, foi implementado um algoritmo para lidar os estes dados, no banco de dados do PAT2Math. Este algoritmo organiza os dados de cada aluno, separando-os em arquivos do tipo *Comma-separated values* (CSV). Escolheu-se esse tipo de arquivo por ele apresentar uma estrutura muito simples e fácil de implementar via código: separa-se cada tupla do Banco de Dados em linhas, e cada elemento da tupla com algum caracter separador. Neste trabalho, optou-se pelo uso do ponto e virgula (;) como separador, de modo a deixar o arquivo mais legível e tornar mais fácil a identificação dos campos vazios. Importante ressaltar que esse algoritmo organizou apenas os dados que foram armazenados do período das 9:00 às 12:00 das sextas-feiras em que os estudantes tinham aula de laboratório. Isso porque, como o sistema é acessado via internet, não há garantias de que os dados coletados de outros horários teriam sido de resoluções dos próprios alunos, ou se o estudante requisitou ajudas a terceiros. Durante as atividades na escola, os alunos obtiveram auxílio da professora. No entanto, a professora não informava a resposta, mas apenas fornecia dicas de como prosseguir, que permitiam ao estudante raciocinar sobre o problema em questão.

Da mesma forma que as resoluções dos alunos, o algoritmo também organizou, em arquivos separados, as principais falsas concepções identificadas nas respostas dos estudantes, que são apresentadas a seguir, tendo já sido introduzidas na seção 6.1.3.1.

- **Somas e Subtrações de incógnitas com constantes:** O estudante realiza uma operação de soma/subtração entre incógnitas e constantes. Exemplo: $3x + 4 = 0 \Rightarrow 7x = 0$.
- **Sinal negativo:** O aluno opera de forma incorreta os termos da operação que possuem sinal negativo ou simplesmente os ignora. Exemplo: $-4x - 3 = 0 \Rightarrow 7x = 0$.
- **Operação inversa é aplicada incorretamente:** Ao aplicar a operação inversa para as operações soma ou subtração, “movendo um termo para o outro lado da equação”, a operação que acompanha o termo é mantida. Exemplos: $-4x - 3 = 0 \Rightarrow -4x = -3$, e $-4x = -3 \Rightarrow x = -3 \times -4$.
- **Operação inversa aplicada corretamente, porém o sinal também é trocado:** Ao aplicar a operação inversa para as operações de multiplicação e divisão, “movendo um termo para o outro lado da equação”, o aluno acaba por inverter o sinal do termo que foi movido. Exemplo: $-4x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{4}$.
- **Desconhecimento da operação inversa dos termos:** Ao aplicar a operação inversa, “movendo um termo para o outro lado da equação”, é aplicada uma operação incorreta,

ou seja, um termo que está multiplicando/dividindo passa a somar/subtrair ao trocar de lado. Exemplo: $-4x = -3 \Rightarrow x = -3 - 4$.

- **Operação inversa correta, porém com posição dos termos incorreta:** Ao aplicar a operação inversa da multiplicação, “movendo um termo para o outro lado da equação”, o termo passa a ser o numerador da fração, ao invés de ser o denominador. Exemplo $-4x = -3 \Rightarrow x = \frac{-4}{-3}$.
- **Erros diversos:** Erros, ou deslizes, ao realizar as operações básicas, somas, subtrações, multiplicações e divisões incorretas. Exemplo: $2x = 26 + 30 \Rightarrow 2x = 66$.

Com relação a esses arquivos de log das interações dos estudantes com o sistema, cada linha era composta pelos seguintes dados:

1. A equação inicial: aquela que é apresentada ao aluno no início do exercício;
2. O passo (a resposta) do aluno: a equação que o aluno supõe que seja o próximo passo de resolução da equação;
3. As operações aplicadas pelo estudante organizadas em 17 colunas, cada uma contendo cada operação possível no sistema. Estando as operações nas colunas, os campos correspondentes assumem os seguintes valores:
 - Caso o estudante tenha aplicado corretamente tal operação, o campo correspondente assume o valor “1”.
 - Se ele errou a resposta, o campo referente à operação incorreta assume o valor “-1”.
 - Caso ele não tenha utilizado tal operação, o campo assume o valor “0”.
4. Um valor booleano indicando se o passo do estudante está correto ou não;
5. Uma mensagem do sistema;
6. O *error feedback*, em caso de erro.

Por exemplo, considerando a equação $x + 1 = 23$, o “Aluno 30” forneceu como próximo passo $x = 22$. A tupla correspondente a essa submissão fica de acordo com a Tabela 5. Por esta tupla, é possível inferir que o aluno, aplicou as operações referentes ao Princípio Aditivo (PA) e a operação de adição (AD) para resolver este passo da equação. O campo operação inversa (OI) está presente devido a versões anteriores do modelo cognitivo do PAT2Math, o qual considerava os princípios aditivo e multiplicativo uma única operação. O campo *feedback* está com o valor “null” uma vez que não houve *error feedback* retornado pelo sistema, pois o passo está correto.

O arquivo de falsas concepções possui uma estrutura similar, porém, no lugar das operações, cada coluna contém uma falsa concepção identificada durante a interação dos alunos com o sistema. Com relação às operações e às falsas concepções, elas foram registradas no banco de

Tabela 5: Exemplo de tupla do arquivo CSV

e-mail	exercício	passo	AD	SB	MT	DV	SP
aluno30	$x+1=23$	$x=22$	1	0	0	0	0
PA	PM	MM	DM	AF	MF	DF	OI
1	0	0	0	0	0	0	1
UT	RE	ER	DE	correta	Mensagem	feedback	
0	0	0	0	true	Parabéns!...	null	

Fonte: Elaborada pelo autor.

dados de acordo com as inferências do módulo especialista do PAT2Math, que é apresentado na seção 2.4.

7.2 Avaliação da Rede

Fazendo-se uso dos arquivos CSV gerados, com base nos dados do banco de dados do PAT2Math, implementou-se um algoritmo para apresentar à rede as evidências de acertos e erros, para cada operação algébrica utilizada pelos alunos ao resolver as equações.

Toda a interação do algoritmo com a RBD, ocorreu através da biblioteca jSMILE, que é um *front-end* Java para a biblioteca SMILE. O SMILE é uma biblioteca C++ que lida com raciocínio probabilístico e permite, entre outras funcionalidades, a implementação e manipulação de redes Bayesianas e redes Bayesianas Dinâmicas. Essa biblioteca disponibiliza também o seu ambiente gráfico, o GeNIe, que permite a construção e manipulação, de forma gráfica, destas estruturas. Ambos estão disponíveis no site <https://dslpitt.org/genie/>.

Através dos arquivos CSV, o algoritmo estruturou os dados por aluno. Cada aluno possui a sua lista de exercícios; cada exercício contém o seu conjunto de passos, e cada passo está relacionado ao seu conjunto de operações. O conjunto de operações de cada passo representa todas as operações que o sistema especialista do PAT2Math inferiu que o aluno utilizou para chegar ao passo atual, a partir de um passo anterior, pois o sistema permite ao aluno omitir alguns passos. Por exemplo, considera-se que um estudante submeteu como próximo passo $x = 3$ para a equação $3x = 5 + 4$. O Modelo Cognitivo do PAT2Math irá inferir as operações AD, PM e SP, ou seja, embora não explicitado, o aluno realizou mentalmente as seguintes operações:

1. A operação de soma: $3x = 5 + 4 \Rightarrow 3x = 9$
2. O princípio multiplicativo: $3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3}$
3. A simplificação de termos: $x = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$

O algoritmo desenvolvido lê os dados estruturados do arquivo e, de acordo com o tipo de informação lida, executa as seguintes ações:

- Se é lida uma operação com o valor 1, então o nodo-sensor (passo) correspondente a esta operação é instanciado com o estado “Correct”, e os nodos-sensores das falsas concepções correspondentes são instanciados com o estado “False”. Ao concluir a propagação das evidências, a rede avança um *time-slice*.
- Se é lida uma operação com o valor -1, então o nodo-sensor da falsa concepção correspondente a essa operação é instanciado com o estado “True”. Os outros nodos-sensores relacionados, como a operação e as outras falsas concepções relacionadas com a operação, são instanciados com os estados “Incorrect” e “False”, respectivamente. Após a propagação das evidências, a rede avança um *time-slice*.
- Se é lido um novo exercício, a rede volta a t_0 : as probabilidades do *time-slice* atual são salvas, a rede é zerada, evidências são removidas; os dados salvos, bem como as últimas evidências, são inseridos em t_0 . A rede avança, então, para t_1 , de modo a receber as evidências desta nova equação.
- Finalizada a iteração sobre um aluno, os dados referentes às inferências da rede em cada *time-slice* são salvos em outro arquivo CSV. O algoritmo prossegue para o aluno seguinte e o processo se repete.

Após a propagação de cada evidência de cada exercício, as probabilidades obtidas em cada nodo foram comparadas com os resultados dos pós-testes. Esses testes foram aplicados nas turmas que utilizaram o PAT2Math durante as aulas de matemática. O pós-teste foi aplicado na última semana de aula. O mesmo consistiu em três exercícios relacionados à álgebra, sendo o primeiro deles interpretativo, ou seja, a partir de uma descrição o estudante deveria obter a equação correspondente. Já os demais exercícios trabalhavam a resolução de equações do 1º grau. Por tratar apenas de questões de interpretação, o primeiro exercício não foi utilizado nesta avaliação, uma vez que a rede desenvolvida não é capaz de lidar com questões deste gênero. No Apêndice D, estão as duas avaliações que foram aplicadas como pós-testes nas turmas. Elas envolvem o mesmo conhecimento e possuem o mesmo nível de dificuldade, mas são diferenciadas para que os alunos de turmas diferentes não pudessem trocar respostas durante o intervalo.

Para cada equação do pós-teste, as operações necessárias para resolvê-las foram identificadas. Após isso, cada pós-teste foi analisado individualmente. Essa análise consistiu em identificar a (in)correta aplicação de cada operação registrada. Caso o aluno aplicasse uma operação desnecessária, por conta de uma falsa concepção que o levou a outro caminho de resolução, foi analisado se, mesmo seguindo esse caminho, as operações eram executadas corretamente. No Apêndice E, encontra-se uma planilha com os registros dos pós-testes. Nessa planilha, para cada passo executado corretamente, é atribuído o valor “1” na célula correspondente, um “-1” é atribuído a um passo incorreto e “0” a um passo não aplicado.

Tabela 6: Médias das diferenças

Operação	Média	Desvio Padrão
AD	0,16	0,13
SB	0,13	0,11
MT	0,21	0,19
DM	0,17	0,21
SP	0,18	0,2
PA	0,12	0,18
PM	0,1	0,15
MM	0,21	0,2
AF	0,65	0,14

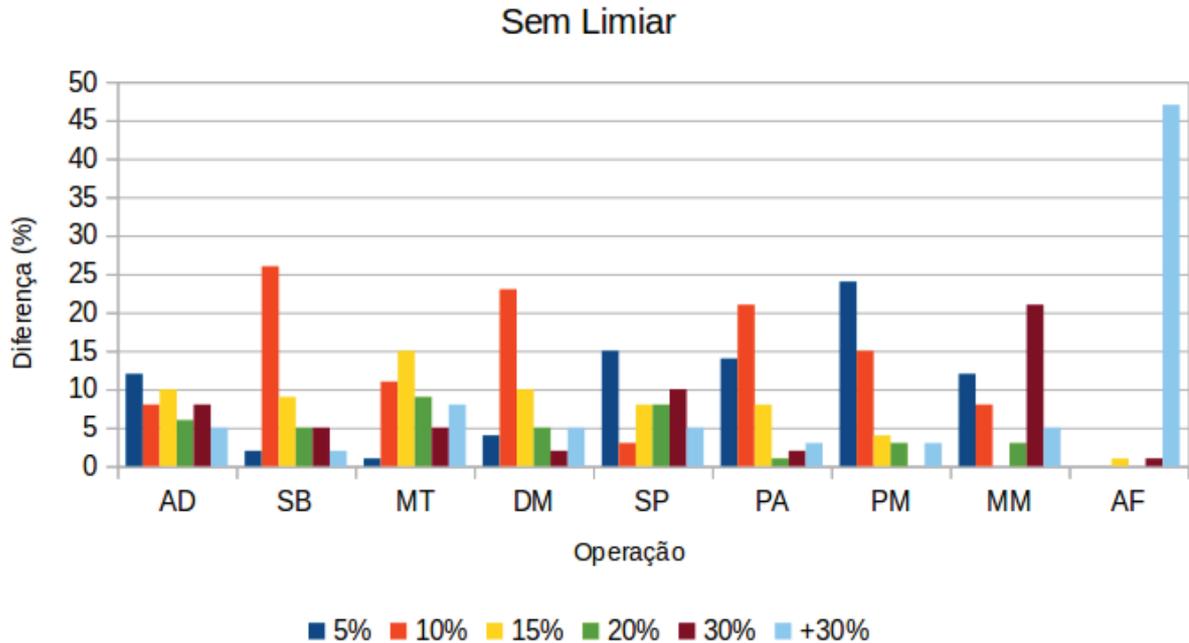
Fonte: Elaborada pelo autor.

Registrados os dados dos pós-testes, calculou-se, então, o percentual de acerto dos alunos em cada operação. Para esse cálculo, considerou-se apenas as operações resolvidas de forma correta ou incorreta. As operações não resolvidas não foram consideradas porque não indicam se o aluno conhece ou não a operação. O percentual de acerto de uma determinada operação no pós-teste foi calculado da seguinte maneira: das x vezes em que o aluno aplicou a operação, quantas y vezes ele acertou: $\frac{y}{x}$.

Os percentuais de acertos de cada operação no pós-teste foram comparados com os nodos correspondentes da rede. Por exemplo, o percentual de acerto da operação de “soma” no pós-teste foi comparado com a probabilidade marginal do nodo AD, do último *time-slice* utilizado na rede. Extraíu-se, então, a diferença absoluta entre os dois valores. O gráfico da Figura 29 ilustra os percentuais obtidos com os cálculos das diferenças, para cada operação. Os dados estão organizados em intervalos de diferença (resultado do pós-teste - resultado da rede): 5%, 10%, 15%, 20%, 30% e valores acima de 30%. Observa-se uma grande distribuição entre os valores, não havendo grande concentração de valores entre os intervalos, com exceção da operação de soma de frações (AF). Isso porque, ao resolver as equações do pós-teste que permitiam empregar esta operação, os alunos optaram por aplicar a regra do MMC sobre toda a equação, de modo a eliminar os denominadores das frações. Assim, o resultado da diferença, nesta operação, ficou por conta das probabilidades marginais dos nodos da rede. As médias das diferenças, para cada operação, são listadas na Tabela 6.

Observou-se nesta rede que as evidências de erro reduziam consideravelmente as probabilidades de conhecimento em uma habilidade. Isso se deve ao fato de a rede ser reiniciada a cada nova equação, o que elimina as possíveis evidências de acerto que poderiam reduzir o decréscimo no conhecimento. Este reinício é necessário, pois é computacionalmente inviável manter uma rede com todos os *time-slices* presentes. De fato, foi verificado quantos *times-slices* seriam necessários para a rede comportar todas as operações realizadas por um determinado estudante. O resultado aproximou-se de 390 *time-slices*.

Deste modo, optou-se por utilizar limiares: uma vez que a probabilidade de um aluno conhecer determinada operação, ou conceito, ultrapassa determinado valor, é considerado que ele

Figura 29: Diferenças entre os dados obtidos com os pós-testes e a rede

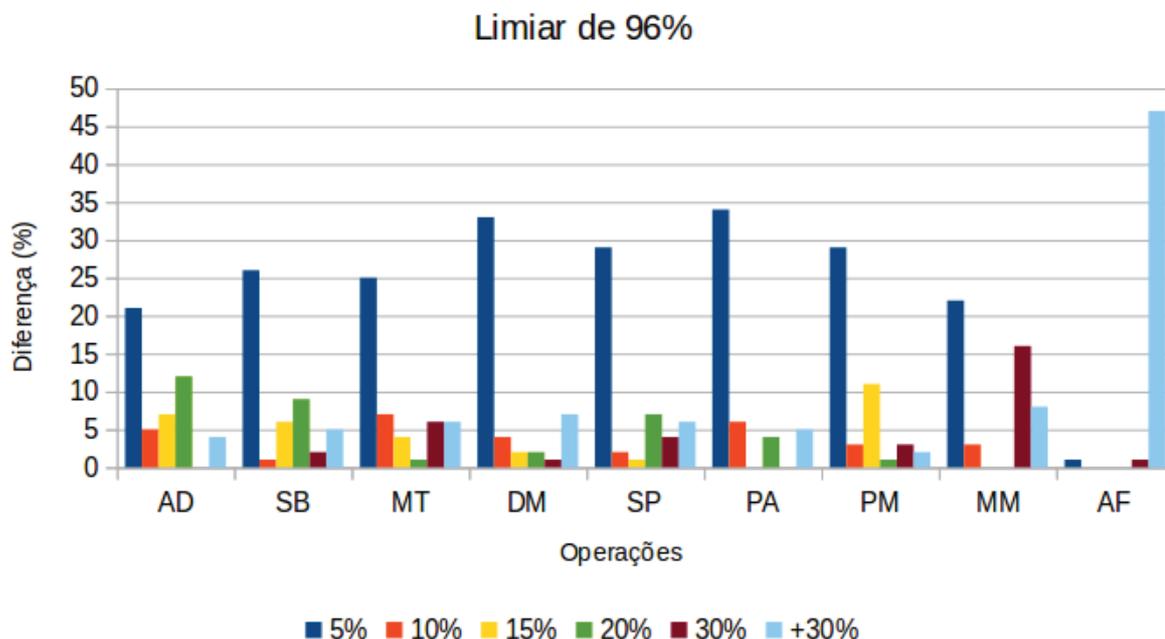
Fonte: Elaborado pelo autor

sabe esta operação, ou conceito. Logo, no *time-slice* em que isso ocorre, o nodo é instanciado com o estado “*Knows*”. Assim, em caso de erro, a probabilidade não irá decrescer vertiginosamente. Porém, se a probabilidade de um nodo nunca ultrapassar este limiar, o resultado será o mesmo que não utilizar o limiar.

A fim de identificar o limiar ideal, a rede foi avaliada sob dois limiares, 96% e 98%. Estes valores foram escolhidos porque se observou que com limiares baixo de 96% o aluno “aprendia” muito rapidamente, e dificilmente a probabilidade era afetada pela taxa de lembrança ($\rho(O_n)$), ou seja, dificilmente o conhecimento decrescia por conta do “esquecimento”. Em contrapartida, limiares acima de 98% produzem resultados semelhantes à rede sem o limiar, uma vez que, utilizando uma taxa de lembrança de 99%, dificilmente, a probabilidade vai alcançar esse valor, pois a cada novo *time-slice* as probabilidades irão decrescer em função dessa taxa. Isso ocorre a menos que sejam apresentadas novas evidências. Neste caso, as probabilidades irão aumentar, ou diminuir, em função dessas evidências, mas dificilmente atingindo 99%.

O algoritmo utilizado na avaliação anterior foi, então, adaptado para trabalhar com os limiares. Em seguida, os mesmos dados foram repassados à rede, e foi realizada a comparação com os resultados do pós-teste. Os resultados estão ilustrados na Figura 30 para o limiar de 96%, e a Figura 31 para o limiar 98%. As médias das diferenças são apresentadas na Tabela 7.

Observa-se, nos resultados ilustrados na Figura 30, que com um limiar de 96% predominam os valores no intervalo de 0% a 5% de diferença. Isso significa que a diferença entre o valor reconhecido pela rede e o resultado do pós-teste para cada unidade de conhecimento é geralmente menor que 5%. Porém, utilizando o limiar de 98%, essas diferenças são maiores e estão mais

Figura 30: Diferenças entre os dados obtidos com os pós-testes e a rede (96% de limiar)

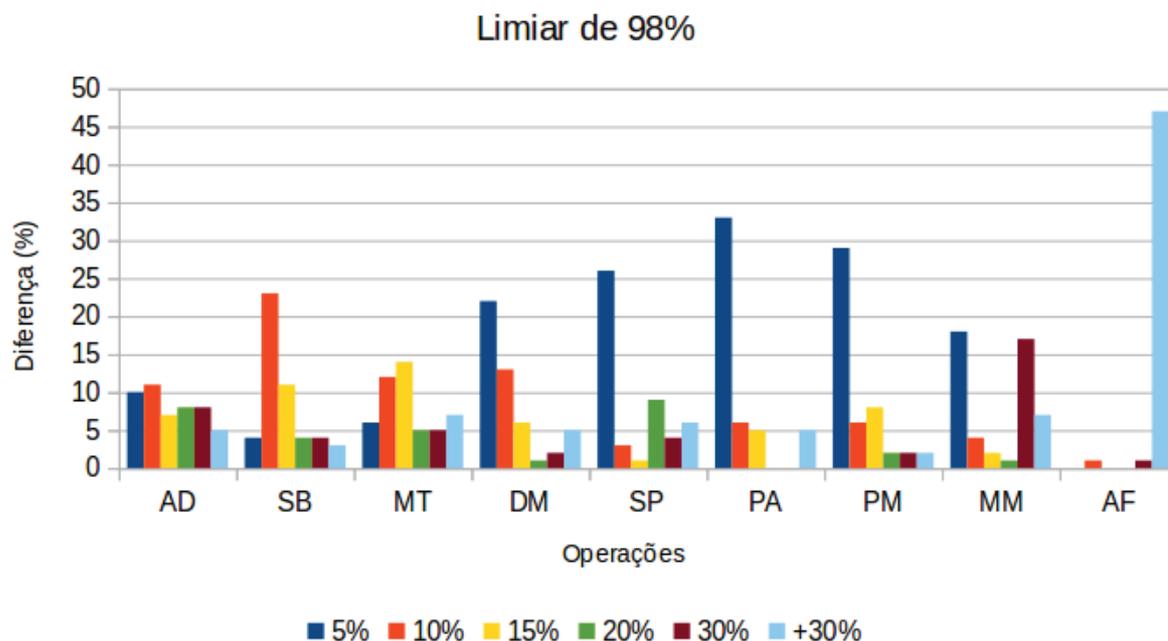
Fonte: Elaborado pelo autor

distribuídas até 30%, como mostra os casos da Soma (AD) e Multiplicação (MT), na Figura 31. Há também a predominância maior de outros intervalos como os intervalos 6% a 10% e 11% a 15%. Conforme o esperado, o comportamento da soma de frações (AF) diferencia-se das demais operações, uma vez que não foi mostrado, nos pós-testes, evidências da aplicação desta operação. Desse modo, o valor obtido ficou por conta da probabilidade marginal de rede. A exceção foi o aluno “Aluno9”, que é representado pela diferença menor que 5% na Figura 30 e menor que 10%, na Figura 31. O outro valor apresentado nos gráficos, representando o intervalo menor que 30%, refere-se ao “Aluno3”, cuja inferência da rede retornou 23% de chances deste aluno conhecer esta operação. Como ele não aplicou a operação no pós-teste, o resultado da diferença permaneceu em 23%. A planilha com todos os resultados da comparação está

Tabela 7: Médias das diferenças para os limiares de 96% e 98%

Operação	Média (96%)	Desvio Padrão	Média (98%)	Desvio Padrão
AD	0,14	0,122	0,16	0,14
SB	0,11	0,15	0,1313	0,1181
MT	0,13	0,2	0,1835	0,1839
DM	0,11	0,24	0,1347	0,2313
SP	0,12	0,2	0,1294	0,1962
PA	0,1	0,21	0,1107	0,1913
PM	0,09	0,18	0,0901	0,1669
MM	0,19	0,23	0,1955	0,2216
AF	0,7	0,21	0,67	0,17

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31: Diferenças entre os dados obtidos com os pós-testes e a rede (98% de limiar)

Fonte: Elaborado pelo autor

disponível nos Apêndices F e G.

Interessante notar que, para ambos os limiares, as operações de simplificação (SP), do princípio aditivo (PA), do princípio multiplicativo (PM), da propriedade distributiva (DM) e do mínimo múltiplo comum (MM) mostram um comportamento similar no que diz respeito ao intervalo de 5%. Quanto às operações PA, PM e SP, elas estão presentes em qualquer equação de 1º grau na maioria dos casos, ou seja, são operações que os alunos irão aplicar com maior frequência. A quantidade de operações aplicadas pelos alunos ao interagir com o PAT2Math é listada na Tabela 8. Com relação às quatro operações fundamentais, uma boa parte desta quantidade deve-se ao fato do Modelo Cognitivo resolver uma “Operação Inversa” passo-a-passo, ou seja, ele soma/subtrai/multiplica/divide em ambos os lados, ao invés de simplesmente “mover o termo para o outro lado da equação”. Para a divisão (DV), não houve registros de aplicação, pois essa operação é interpretada como simplificação de termos (SP), já que o PAT2Math não trabalha com números decimais.

7.2.1 Teste estatístico de equivalência entre os resultados da rede e do pós-teste

Conforme pode ser observado nos resultados apresentados em tabelas e gráficos, na seção 7.2, há uma melhora aparente da inferência da rede na versão com 96% de limiar. Os resultados mostram que essa versão da rede foi a que apresentou menor diferença entre os resultados do pós-teste (que representam o conhecimento atual do aluno) e resultados da inferência da própria rede. Porém, ainda é necessário verificar se os resultados das inferências obtidas pela

Tabela 8: Total de operações aplicadas durante o uso do PAT2Math pelos estudantes

Operação	Quantidade	Média (por aluno)	Média (por equação)
AD	2.614	44,30	17,66
SB	2.705	45,84	18,27
MT	5.223	88,52	35,29
SP	3.377	57,23	22,81
PA	3.713	62,93	25,08
PM	4.812	81,55	32,51
MM	158	2,67	1,06
DM	1.522	25,79	10,28
AF	203	3,44	1,37
Total de Alunos:	59	Total de Equações:	148

Fonte: Elaborada pelo autor.

rede (o conhecimento inferido para cada operação algébrica) são equivalentes estatisticamente aos resultados do pós-teste. Para isso, é necessária a realização de um teste de hipótese para comprovar a equivalência.

Uma possibilidade seria a aplicação de um Teste-T pareado, uma vez que ambos os dados tem uma mesma origem, o estudante. Porém o Teste-T não é adequado para esse tipo de análise porque ele é, geralmente, aplicado quando se deseja verificar se dois conjuntos de dados são estatisticamente diferentes. Embora um Teste-T possa mostrar que dois conjuntos de dados não são diferentes, isso não significa que eles sejam equivalentes. Desse modo, é necessária a aplicação de um teste de equivalência, do inglês *equivalence testing*.

Para a realização desse teste de equivalência, utilizou-se o software estatístico Minitab¹, que disponibiliza testes de equivalência. Neste trabalho, aplicou-se o *Equivalence Test with Paired Data* sobre os resultados obtidos com a rede e com o pós-teste. Para este teste, é necessária a definição de dois valores: δ_1 e δ_2 . Eles representam os valores mínimo e máximo, respectivamente, em que os dados podem se diferenciar entre si para serem considerados equivalentes. A hipótese alternativa define que $\delta_1 \leq \mu \leq \delta_2$, na qual μ representa a diferença entre as amostras de teste (dados da rede) e as amostras de referência (dados do pós-teste). Definidos os parâmetros, o software, então verifica duas hipóteses nulas:

- $H_{0a} : \mu \leq \delta_1$
- $H_{0b} : \mu \geq \delta_2$

Se ambas as hipóteses nulas forem rejeitadas, então, μ estará dentro dos limites de δ_1 e δ_2 e os dados serão considerados equivalentes. Em outras palavras, para que a hipótese nula seja rejeitada é necessário que ambos os valores, P_1 e P_2 sejam menores que α . Para este trabalho foi utilizado o valor de 0,05, para α ; deste modo, o intervalo de confiança foi de 95%. O método empregado no teste de equivalência é o *two one-sided test* (TOST) (MEYNER, 2012).

¹Disponível em : <http://www.minitab.com/en-us/>

Tabela 9: Resultados do Teste de Equivalência para a versão sem limiaries

Intervalo de Equivalência					
δ	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
AD	P=0,999	P=0,908	P=0,246	P=0,004	
SB	P=0,203	P=0,003			
MT	P=0,531	P=0,121	P=0,009		
DM	P=0,165	P=0,015			
SP	P=0,25	P=0,028			
PA	P=0,086	P=0,002			
PM	P=0,108	P=0,001			
MM	P=0,196	P=0,021			
AF	P=1	P=1	P=1	P=1	P=1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 10: Resultados do Teste de Equivalência para a versão com 96% de limiar

Intervalo de Equivalência					
δ	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
AD	P=0,192	P=0,002			
SB	P=0,586	P=0,044			
MT	P=0,402	P=0,045			
DM	P=0,798	P=0,29	P=0,03		
SP	P=0,888	P=0,346	P=0,024		
PA	P=0,725	P=0,163	P=0,006		
PM	P=0,77	P=0,129	P=0,002		
MM	P=0,272	P=0,039			
AF	P=1	P=1	P=1	P=1	P=1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse teste de equivalência foi aplicado para cada operação algébrica inferida pela rede (apresentada na seção anterior), nas quais diferentes valores de δ_1 e δ_2 foram utilizados. Iniciando-se com um valor de 0,05, o teste foi aplicado até que a hipótese nula fosse rejeitada, confirmando a equivalência, ou até que este valor atingisse 0,3. Na prática, isso significa mostrar que a rede consegue inferir tão precisamente quanto o pós-teste aceitando uma diferença, determinada por δ , de até 5%. Caso o teste estatístico de equivalência não consiga provar com esse limiar, aumenta-se o limiar para 10% (0,1), e, assim, sucessivamente, para 15%, 20%, 25% e finalmente 30%. O valor de δ_1 , nesta avaliação, foi sempre $\delta_1 = -\delta_2$. Na Tabela 9, são apresentados os resultados obtidos com esse teste de equivalência para a versão da rede sem a política dos limiaries. Nas Tabelas 10 e 11, estão os resultados do teste de equivalência para os limiaries de 96% e 98%, respectivamente. A parte sombreada destas tabelas representa os valores de δ não verificados, uma vez que a equivalência já foi obtida com valores de intervalos menores. Os valores de P , destacados em outra cor, representam os intervalos de δ em que a hipótese nula não foi rejeitada.

Observa-se, nessas tabelas, o que já era esperado com a operação AF, ou seja, não foi en-

Tabela 11: Resultados do Teste de Equivalência para a versão com 98% de limiar

δ	Intervalo de Equivalência				
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3
AD	P=0,999	P=0,888	P=0,215	P=0,003	
SB	P=0,083	P=0,001			
MT	P=0,334	P=0,4			
DM	P=0,502	P=0,096	P=0,005		
SP	P=0,803	P=0,24	P=0,013		
PA	P=0,337	P=0,024			
PM	P=0,545	P=0,038			
MM	P=0,191	P=0,022			
AF	P=1	P=1	P=1	P=1	P=1

Fonte: Elaborada pelo autor.

contrada equivalência entre os valores da rede e do pós-teste para AF, uma vez que não houve valores do pós-teste para realizar a comparação. Também é observado que apenas no limiar de 96% (Tabela 10) todas as operações tiveram sua equivalência comprovada com um valor de δ com no máximo 0,15, nas quais, quatro operações foram validadas com um valor de $\delta = 0,1$, e quatro operações com um $\delta = 0,15$. Na rede sem limiar, foram seis operações aceitas com $\delta = 0,1$, uma operação com $\delta = 0,15$ e uma operação $\delta = 0,2$. Já na rede com limiar de 98%, foram cinco operações com $\delta = 0,1$, duas operações com $\delta = 0,15$ e uma operação com $\delta = 0,2$. Todas as tabelas mostram a operação AF rejeitada em todos os valores de δ , pelos motivos explicados anteriormente.

Nos Apêndices H e I, estão apresentadas as versões completas das tabelas com os resultados deste teste de equivalência. Nelas, estão inclusas os valores de P_1 e P_2 , o T-Value e o df, que em todos os testes foi igual a 48.

7.2.2 Considerações gerais sobre a avaliação

No que diz respeito a esta avaliação, foram utilizados os dados de 49 alunos dos 59 alunos que interagiram com o PAT2Math. Isso porque o pós-teste ocorreu nas semanas finais de aula e, por conta disso, alguns alunos não compareceram no dia em que este teste foi aplicado.

Durante a análise de cada pós-teste, foi possível observar alguns fatos interessantes:

- A propriedade distributiva foi uma das operações que os alunos menos erraram, com apenas 2 erros, entre 49 alunos.
- Dos erros cometidos com o princípio aditivo, a maior parte ocorreu com incógnitas: em uma mesma equação, ao aplicar o princípio aditivo sobre constantes, o estudante executava corretamente, porém, cometia um deslize ao realizar a mesma operação sobre incógnitas.

- O erro mais frequente, detectado com a operação de MMC, aconteceu nas equações $\frac{2x}{-2} = 12 + x$ e $\frac{2x}{-3} = 10 + x$. Acredita-se que isso se deve ao denominador negativo.
- Alguns alunos têm a tendência de eliminar a fração, mesmo quando não é possível.
- Equações simples, como $\frac{x}{2} = -5$, são resolvidas através de MMC ao invés do princípio multiplicativo. Por exemplo, ao invés de resolver da seguinte forma: $\frac{x}{2} = -5 \Rightarrow x = -5 \times 2 \Rightarrow x = -10$; foi comum o uso do cálculo do MMC: $\frac{x}{2} = -5 \Rightarrow \frac{x=-10}{2} \Rightarrow x = -10$.

Com relação à avaliação da rede, na operação de MMC, é observada forte presença tanto de diferenças menores que 5%, quanto diferenças entre 20% e 30%. Isso se deve ao fato de que poucos alunos atingiram os planos de aula que continham as equações que exigiam a aplicação do MMC. Porém, ao resolver equações simples como $\frac{x}{2} = -5$, quando o aluno informava a resposta $x = -10$, o sistema inferia que o mesmo havia aplicado o princípio multiplicativo, ao invés do MMC como relatado acima. Também há a questão da probabilidade informada pela rede para essa operação. Há casos em que ela deve-se ao crescimento proporcionado pelas taxas de aprendizado ($\lambda(O_n)$) e de lembrança ($\rho(O_n)$) e não às evidências de acerto e erro que beirava aos 73% ao final da execução da rede. Coincidentemente, alguns alunos acertaram 75% das questões que envolviam o MMC.

Quanto ao comportamento da rede, ao definir uma taxa de lembrança de 100%, ou seja, o aluno não esquece, o crescimento do conhecimento é elevado, chegando facilmente aos 90%, sem a necessidade de alguma evidência. Nos casos em que não houve evidências para a operação de soma de frações, o seu crescimento deve-se, também, à realização da operação de MMC, uma vez que é pré-requisito para a soma de frações. Dessa forma, observou-se uma melhora na inferência na rede com o limiar de 96%, em comparação às outras duas configurações, ficando esta escolhida como a melhor configuração para a rede proposta.

7.3 Conclusões sobre a avaliação

Para discussão final, retoma-se aqui os dois **objetivos específicos**, definidos na seção 1.2, para discussão:

- Verificar se um modelo de inferência do conhecimento algébrico que represente as operações, os conceitos e as falsas concepções, assim como as relações entre estes, apresenta uma melhora na inferência do conhecimento do estudante, em relação a uma modelagem que utilize apenas operações algébricas.
- Tornar a presente estrutura em uma estrutura de inferência que seja independente de equações. Deste modo, a mesma estrutura pode ser empregada para realizar a inferência do conhecimento do estudante, sem a necessidade de reestruturá-la para cada conjunto de equações.

Com relação ao **primeiro objetivo**, foi realizada uma comparação entre a rede atual (Rede III), com a sua versão anterior (Rede II), que utiliza apenas operações. Esta apresentava o resultado da inferência por meio de um único nó, “Equacao_1__Grau”, que pode ser observado na Figura 19, e que representa um parecer geral da rede sobre o conhecimento do estudante. Devido a esse fato, para cada um dos 49 alunos da avaliação, calculou-se uma média entre os valores obtidos com a diferença entre os dados da rede e do pós-teste de cada operação. Desse modo, obteve-se um valor para cada aluno. Para a Rede II, calculou-se a diferença entre os resultados inferidos pelo nó “Equacao_1__Grau” com o parecer emitido pela especialista, que podem ser encontrados em (SEFFRIN; RUBI; JAQUES, 2014).

Como estes dados provém de amostras diferentes (diferentes turmas de alunos), foi aplicado um Teste-T não pareado. A hipótese nula (H_0) define que a Rede II terá uma capacidade de inferência inferior à Rede III, ou seja, a diferença entre o conhecimento inferido pelo especialista e pela rede serão maiores. A hipótese alternativa (H_1) define que a Rede III terá uma capacidade de inferência superior, ou seja, haverá uma diferença menor entre a inferência de conhecimento realizada pela rede e o que foi observado no pós-teste. As hipóteses são descritas a seguir, onde μ_2 representa a média da Rede II (ou seja, a média da diferença entre especialista e Rede II para cada aluno) e μ_3 a média da Rede III (média da diferença entre pós-teste e Rede III para cada aluno):

- $H_0 : \mu_2 - \mu_3 = 0$
- $H_1 : \mu_2 - \mu_3 \geq 0$

Utilizando um intervalo de confiança de 95%, obteve-se $P = 0,0028$. Uma vez que este valor é menor que $\alpha = 0,05$, então, a hipótese nula é rejeitada e a hipótese alternativa pode ser assumida. Dessa forma, pode-se afirmar que há indícios de uma melhora significativa na inferência realizada pela Rede III em relação à Rede II.

Quanto ao **segundo objetivo**, procura-se mostrar se a rede tornou-se independente de problemas. Essa nova rede foi modelada utilizando-se redes Bayesianas Dinâmicas, e empregou-se cada *time-slice* para representar a correta aplicação de uma operação de 1º grau, ou a ocorrência de uma falsa concepção quando esta estiver incorreta. Ambas as informações são inferidas pelo módulo cognitivo do sistema tutor. Caso o aluno omita alguns passos, o módulo cognitivo é capaz de inferir quais operações ele realizou, através do *model-tracing*. Desse modo, um passo pode ser resolvido com um conjunto de operações e, conseqüentemente, um conjunto de *time-slice* serão utilizados para esse passo.

Como as evidências desta rede são as próprias operações de 1º grau, e qualquer equação de 1º grau é resolvida com um conjunto finito destas operações, logo esta rede pode ser utilizada com qualquer equação de primeiro grau. Outra evidência que pode suportar esse fato é a diversidade de equações utilizadas na avaliação da rede.

Desse modo, observa-se que os dois objetivos específicos propostos, nesta dissertação, foram atingidos.

8 CONCLUSÃO

Possuir capacidade adaptativa é o que diferencia os Sistemas Tutores Inteligentes dos demais softwares educacionais. Tal capacidade deve-se, principalmente, ao componente Modelo de Aluno. Este componente é responsável pelo armazenamento de informações referentes a cada aluno que interage com o sistema tutor. Essas informações incluem o perfil do aprendiz, o seu conhecimento e as suas características afetivas. Além disso, esse componente possui a função de identificar as habilidades e os conhecimentos de cada estudante. O processo de inferência, também chamado de diagnóstico, ocorre durante a interação dos alunos com o sistema. Durante esse processo, cada resposta submetida pelos alunos servirá de evidência de conhecimento para esse componente. Como apontado por (VANLEHN, 2006), as respostas submetidas pelos alunos são uma das únicas evidências de conhecimento que eles podem apresentar ao sistema. Isso porque é nesta hora que o sistema possibilita aos estudantes as oportunidades para eles aplicarem os seus conhecimentos (VANLEHN, 2006).

Na literatura, é possível encontrar trabalhos relacionados ao mapeamento do conhecimento do estudante, nos quais é muito comum o uso de redes Bayesianas, porque estas estruturas são capazes de lidar com dados incertos, como o conhecimento, e também permitem estruturar as variáveis, estabelecendo relações entre elas, de forma similar aos mapas conceituais.

Trabalhos como os de (MILLÁN et al., 2013), (NOUH; KARTHIKEYANI; NADARAJAN, 2006) e (DUIJNHOVEN, 2003) modelam o conhecimento através do conceito de pré-requisitos, o que um estudante deve aprender primeiro para que possa compreender o assunto seguinte. Diferenciam-se entre si pela categoria das variáveis empregadas: o primeiro e o segundo focam mais na parte conceitual do domínio, enquanto que o terceiro foca na parte procedural. Destes três, os trabalhos de (MILLÁN et al., 2013) e (DUIJNHOVEN, 2003) estão voltados para a álgebra elementar, sendo que o primeiro está mais voltado para a parte conceitual da álgebra (conceito de equação, equivalência, solução), enquanto que o segundo é mais focado nas operações e nas falsas concepções. No que se refere às semelhanças, estes três trabalhos utilizam os itens de avaliação para prover as evidências às suas redes. Desse modo, se um novo tipo de item for utilizado, a rede deverá ser atualizada para comportar a nova categoria.

Este trabalho propôs uma estrutura de rede Bayesiana que utilize ambos os tipos de conhecimento: (i) os principais conceitos da álgebra e (ii) as operações algébricas, complementando com as principais falsas concepções observadas nos estudantes. De modo a evitar uma reestruturação na rede a cada nova equação, foi utilizada a estrutura de redes Bayesianas Dinâmicas. Nestas, cada *times-slice* representa a aplicação de uma operação para resolver um passo da equação corrente. Desse modo, esta rede pode ser utilizada com qualquer equação que exija as operações de 1º grau. A união dos conceitos de álgebra com as operações e as falsas concepções, organizadas em uma estrutura que seja independente de equação é o que constitui o diferencial deste trabalho.

Além dos diferenciais citados, anteriormente, são utilizadas as operações e as falsas concep-

ções como os nodos-sensores da rede, pois se deseja que o diagnóstico seja voltado a identificar se um aluno consegue aplicar corretamente cada operação algébrica, e não se ele é capaz de resolver a equação por completo. Assim é possível o tutor focar nas operações em que o estudante tem mais dificuldades.

Para o processo de avaliação, foram coletados dados de 59 alunos do 7º ano de uma escola particular de São Leopoldo. Tais dados são referentes às interações desses alunos com o STI PAT2Math. Durante 8 semanas, ele resolveram equações no sistema, como parte da disciplina de matemática. Ao final dos dois meses, eles resolveram um pós-teste que foi utilizado para comparação com os resultados da rede. Como alguns alunos não resolveram os pós-testes, aproveitou-se, de fato, dados de 49 alunos para a avaliação.

No processo de avaliação, os dados coletados na escola foram organizados de forma que cada aluno possuísse o seu conjunto de equações resolvidas, e cada equação o seu conjunto de operações aplicadas e falsas concepções identificadas. Juntamente com as operações, foram as evidências para a rede. Para cada aluno, os resultados da rede foram comparados com o seu respectivo desempenho no pós-teste. Este, por sua vez foi analisado, de maneira a verificar cada operação aplicada pelos estudantes, identificando-se a (in)correta aplicação de cada uma. A partir da comparação, extraiu-se a diferença dos resultados. Em uma primeira análise, os resultados não mostraram-se satisfatórios, uma vez que houve uma grande distribuição dos resultados, ou seja, os valores das diferenças variando no intervalos de 6% a 20%. Desse modo, estabeleceu-se valor de limiar, isto é, uma vez que uma unidade de conhecimento (conceito ou operação) ultrapasse este limiar é considerada como aprendida. Foram testados os limiares de 96% e 98%, entre os quais o limiar de 96% apresentou resultados melhores, com mais da metade dos valores das diferenças não ultrapassando os 5%, demonstrando uma capacidade de inferência superior à sua versão anterior, a rede que utilizava apenas operações. Destaca-se, também, a importância dos pré-requisitos, uma vez que reduziram o decréscimo de conhecimento, provido pela taxa de lembrança, nos nodos aos quais eram pré-requisitos.

Comprovada a eficácia da rede que utilizou o limiar de 96% sobre as outras duas versões, através de testes de equivalência, buscou-se, então, comprovar a eficácia desta rede sobre a rede anterior, que utiliza apenas a relação entre as operações, de modo a atingir o primeiro objetivo proposto. Ele se refere ao uso de conceitos e falsas concepções combinados com as operações para melhorar a inferência da rede. Através da aplicação de um Teste-T pareado sobre os dados desta rede e de sua versão com apenas as operações de 1º grau, foi possível verificar a hipótese. Da mesma forma, por utilizar as operações como evidências para a rede e pelo fato de utilizar-se um conjunto de equações variadas na avaliação, foi possível verificar a aplicabilidade desta rede para qualquer equação de 1º grau.

Em trabalhos futuros, pretende-se integrar esta rede ao STI PAT2Math. Consequentemente, será possível a implementação, no PAT2Math, de métodos mais inteligentes de seleção de exercícios, como o *mastery learning* ou o *macroadaptation*. Também se pretende incluir novos conceitos na rede, que foram observados durante a avaliação, mas não foram incluídos na rede

por não haver meios de avaliá-los. Por exemplo, o conceito de fração, “o que representa uma fração?”. A rede já possui o assunto “fração”, que é a coleção de operações relacionadas a frações, porém, não possui um nodo para representar que o aluno sabe o que é uma fração: que representa a parte de um todo, que pode ser considerada um número e que, portanto, pode ser operada. Outro conceito, também referente a frações, é o conceito de fração inversa. Esse conceito é utilizado na operação de divisão de frações, uma vez que o seu procedimento de resolução resume-se a “multiplicar a primeira fração pela inversa da segunda”. Também destaca-se a volta do nodo “Interpretação”, focado na parte de obter uma equação a partir de uma situação descrita, que fora removido da rede por não haver, atualmente, meios de apresentar evidências a ele. Pretende-se futuramente integrar o PATtranslation ao PAT2Math. O PATtranslation é um componente que provê ao estudante meios de inferir uma equação a partir de um enunciado de problema (*word problem*), justificando-se a volta deste nodo. Finalmente, deseja-se igualmente a inclusão de nodos referentes a equações de 2º grau, que já são resolvidas pelo modelo cognitivo do PAT2Math.

Para a realização deste trabalho, foi utilizado como estudo de caso o STI PAT2Math, porém, o modelo desenvolvido pode ser aplicado em qualquer STI, do tipo *step-based*, voltado para o ensino de álgebra, uma vez que é dependente do domínio algébrico, devido à forma como foi modelado. Também se destaca a necessidade de um mecanismo de inferência, como um sistema especialista, para a identificação das operações e das falsas concepções nas respostas dos estudantes. Uma vez que o presente trabalho é dependente de domínio, pretende-se estendê-lo em uma metodologia a fim de desenvolver outros modelos similares, para outros domínios de aplicação.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. R. The Expert Module. In: POLSON, M. C.; RICHARDSON, J. (Ed.). **Foundations of Intelligent Tutoring Systems**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1988. p. 21–53.
- ANDERSON, J. R.; BOYLE, C. F.; CORBETT, A. T.; LEWIS, M. W. Cognitive Modeling and Intelligent Tutoring. In: CLANCEY, W. J.; SOLOWAY, E. (Ed.). **Artificial Intelligence and Learning Environments**. Scituate, MA, USA: Bradford Company, 1990. v. 42, n. 1, p. 7–49.
- ANDERSON, J. R.; CORBETT, A. T.; FINCHAM, J. M.; HOFFMAN, D.; PELLETIER, R. General principles for an intelligent tutoring architecture. In: REGIAN, J. W.; SHUTE, V. J. (Ed.). **Cognitive approaches to automated instruction**. Mahwah, NJ: Routledge, 1992. p. 81–106.
- BAKER, R. S.; CORBETT, A. T.; ALEVEN, V. More Accurate Student Modeling through Contextual Estimation of Slip and Guess Probabilities in Bayesian Knowledge Tracing. In: INTELLIGENT TUTORING SYSTEMS, 2008. **Anais...** Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 406–415. (Lecture Notes in Computer Science, v. 5091).
- BAKER, R. S.; CORBETT, A. T.; KOEDINGER, K. R. Detecting student misuse of intelligent tutoring systems. In: INTELLIGENT TUTORING SYSTEMS, 2004, Maceió, Brasil. **Anais...** Springer, 2004. p. 531–540.
- BLOOM, B. S. The 2 sigma problem: the search for methods of group instruction as effective as one-to-one tutoring. **Educational researcher**, New Orleans, LA, v. 13, n. 6, p. 4–16, 1984.
- BOOTH, J. L.; KOEDINGER, K. R. Key misconceptions in algebraic problem solving. **Proceedings of the 30th Annual Conference of the Cognitive Science Society**, Washington, DC, p. 571–576, 2008.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Rio de Janeiro, RJ: DP & A, 2000. (Parâmetros curriculares nacionais).
- BURNS, H. L.; CAPPS, C. G. Foundations of Intelligent Tutoring Systems: an introduction. In: POLSON, M. C.; RICHARDSON, J. (Ed.). **Foundations of Intelligent Tutoring Systems**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1988. p. 1–18.
- BUSH, S. B.; KARP, K. S. Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: a review. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam, The Netherlands, v. 32, n. 3, p. 613–632, 2013.
- CARMONA, C.; MILLÁN, E.; CRUZ, J. Pérez-de-la; TRELLA, M.; CONEJO, R. Introducing Prerequisite Relations in a Multi-layered Bayesian Student Model. In: USER MODELING, 2005. **Anais...** Springer Berlin Heidelberg, 2005. p. 347–356. (Lecture Notes in Computer Science, v. 3538).
- CARPENTER, T. P.; KEPNER, H. S.; CORBITT, M. K.; LINDQUIST, M. M.; REYS, R. E. Student Performance in Algebra: results from the national assessment. **School Science and Mathematics**, Hoboken, New Jersey, v. 82, n. 6, p. 514–531, Oct. 1982.

- CONATI, C.; DAVOODI, A. Degeneracy in Student Modeling with Dynamic Bayesian Networks in Intelligent Edu-Games. In: THE 6TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON EDUCATIONAL DATA MINING, 2013, Memphis, Tennessee. **Anais...** International Educational Data Mining Society, 2013. p. 220–223.
- CONATI, C.; GERTNER, A.; VANLEHN, K. Using Bayesian networks to manage uncertainty in student modeling. **User Modeling and User-Adapted Interaction**, The Netherlands, v. 12, n. 4, p. 371–417, 2002.
- COOK, S. W.; DUFFY, R. G.; FENN, K. M. Consolidation and transfer of learning after observing hand gesture. **Child development**, Hoboken, New Jersey, v. 84, n. 6, p. 1863–1871, 2013.
- CORBETT, A.; ANDERSON, J. Knowledge tracing: modeling the acquisition of procedural knowledge. **User modeling and user-adapted interaction**, The Netherlands, v. 4, n. 4, p. 253–278, 1994.
- DAVIS, R.; SHROBE, H. E.; SZOLOVITS, P. What Is a Knowledge Representation? **AI Magazine**, Palo Alto, California, v. 14, n. 1, p. 17–33, 1993.
- DIVALITE. **Divalite toolkit home page**. Acesso em 14/05/2014, <http://perso.limsi.fr/jps/online/divalitesite/site.htm>.
- DUIJNHOVEN, J. V. **Knowledge Assessment using Bayesian Networks**: a case study in the domain of algebraic expectation. 2003. 73 p. Master's thesis Cognitive Artificial Intelligence — Utrecht University, Utrecht, 2003.
- EDUCATION, N. C. on Excellence in. **A nation at risk: the imperative for educational reform**. Washignton, DC: U.S. Government printing office, 1983.
- FARIA, W. D. **Mapas conceituais**: aplicações ao ensino, currículo e avaliação. São Paulo: EPU: Editora Pedagógica e Universitária, 1995.
- GAAG, L. van der; RENOOIJ, S.; WITTEMAN, C.; ALEMAN, B.; TAAL, B. How to elicit many probabilities. In: FIFTEENTH CONFERENCE ON UNCERTAINTY IN ARTIFICIAL INTELLIGENCE, UAI, 1999, San Francisco, CA,. **Proceedings...** Morgan Kaufmann Publishers Inc, 1999. n. 1999-15, p. 647–654.
- GERTNER, M. A.; GERTNER, A. S.; CONATI, C.; VANLEHN, K. Procedural help in Andes: generating hints using a bayesian network student. In: NATIONAL CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE, 15., 1998, Madison, Wisconsin. **Proceedings...** AAAI Press, 1998. p. 106–111.
- GLUZ, J. C. **Introdução as Redes Bayesianas**. Seminário de Pesquisa UNISINOS/PIPCA.
- JAQUES, P. A.; LEHMANN, M.; PESTY, S. Evaluating the affective tactics of an emotional pedagogical agent. In: ACM SYMPOSIUM ON APPLIED COMPUTING - SAC, 2009., 2009, New York, USA. **Proceedings...** ACM Press, 2009. p. 104.
- JAQUES, P. A.; SEFFRIN, H.; RUBI, G.; MORAIS, F. de; GHILARDI, C.; BITTENCOURT, I. I.; ISOTANI, S. Rule-based expert systems to support step-by-step guidance in algebraic problem solving: the case of the tutor pat2math. **Expert Systems with Applications**, The Netherlands, v. 40, n. 14, p. 5456–5465, 2013.

JAQUES, P. A.; VICARI, R.; PESTY, S.; MARTIN, J.-C. Evaluating a cognitive-based affective student model. In: **AFFECTIVE COMPUTING AND INTELLIGENT INTERACTION**, 2011, Memphis, Tennessee. **Anais...** Springer Verlag, 2011. p. 599–608.

KIERAN, C. The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In: **NINTH INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION**, 1988, The Netherlands. **Proceedings...** ERIC, 1988. v. 1, p. 6.

KOEDINGER, K. R.; ANDERSON, J. R.; HADLEY, W. H.; MARK, M. A. Intelligent Tutoring Goes To School in the Big City. **International Journal of Artificial Intelligence in Education**, Amsterdam, v. 8, n. 1, p. 30–43, 1997.

LEE, J. I.; BRUNSKILL, E. The Impact on Individualizing Student Models on Necessary Practice Opportunities. In: **INTERNATIONAL EDUCATIONAL DATA MINING SOCIETY**, 5., 2012, Chania, Greece. **Proceedings...** ERIC, 2012.

MA, W.; ADESOPE, O. O.; NESBIT, J. C.; LIU, Q. Intelligent tutoring systems and learning outcomes: a meta-analysis. **Journal of Educational Psychology**, Washington, DC, v. 106, n. 4, p. 901–918, 2014.

MANSKE, M.; CONATI, C. Modelling Learning in an Educational Game. In: **ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN EDUCATION: SUPPORTING LEARNING THROUGH INTELLIGENT AND SOCIALLY INFORMED TECHNOLOGY**, 2005., 2005, Amsterdam. **Proceedings...** IOS Press, 2005. p. 411–418.

MARTINS, I. M. P. **Impacto na aprendizagem dos gestos de agentes pedagógicos animados para explicação de resolução de equações em Sistemas Tutores Inteligentes**. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Sistemas de Informação) — Universidade do Vale do Rio dos Sinos, 2013.

MATZ, M. Towards a process model for high school algebra errors. In: SLEEMAN, D.; BROWN, J. S. (Ed.). **Intelligent Tutoring Systems**. London, UK: Academic Press, 1982. p. 25–50. (Computers and People).

MEYNNERS, M. Equivalence tests – A review. **Food Quality and Preference**, Schwalbach am Taunus, Germany, v. 26, n. 2, p. 231 – 245, 2012.

MILLÁN, E.; CRUZ, J. L. Pérez-de-la. A Bayesian diagnostic algorithm for student modeling and its evaluation. **User Modeling and User-Adapted Interaction**, The Netherlands, v. 12, n. 2-3, p. 281–230, 2002.

MILLÁN, E.; DESCALÇO, L.; CASTILLO, G.; OLIVEIRA, P.; DIOGO, S. Using Bayesian networks to improve knowledge assessment. **Computers & Education**, Amsterdam, v. 60, n. 1, p. 436–447, 2013.

MILLÁN, E.; LOBODA, T.; CRUZ, J. L. Pérez-de-la. Bayesian networks for student model engineering. **Computers & Education**, Amsterdam, v. 55, n. 4, p. 1663–1683, Dec. 2010.

MORAIS, F. D.; JAQUES, P. Avaliação de usabilidade do Sistema Tutor Inteligente PAT2Math. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, RS, v. 11, p. 1–10, 2013.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem Significativa: a teoria de david ausubel**. São Paulo: Centauro, 2011.

NICAUD, J. F.; BITTA, M.; CHAACHOUA, H.; INAMDAR, P.; MAFFEI, L. Experiments with Aplsix in Four Countries. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, Washington, DC, v. 13, n. 2, p. 79–88, 2006.

NOUH, Y.; KARTHIKEYANI, P.; NADARAJAN, R. Intelligent Tutoring System-Bayesian Student Model. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON DIGITAL INFORMATION MANAGEMENT (ICDIM), 1., 2006, Bangalore, India. **Proceedings...** IEEE, 2006. p. 257–262.

PARDOS, Z. A.; HEFFERNAN, N. T. Modeling individualization in a bayesian networks implementation of knowledge tracing. In: USER MODELING, ADAPTATION, AND PERSONALIZATION, 2010, Big Island, HI. **Proceedings...** Springer Verlag, 2010. p. 255–266. (Lecture Notes in Computer Science, v. 6075).

PEARL, J. **Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: networks of plausible inference**. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1988. 552 p.

REIS, H.; BORGES, S.; DURELLI, V.; S MORO, L. de; BRANDAO, A.; BARBOSA, E.; BRANDAO, L.; ISOTANI, S.; JAQUES, P.; BITTENCOURT, I. Towards Reducing Cognitive Load and Enhancing Usability through a Reduced Graphical User Interface for a Dynamic Geometry System: an experimental study. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MULTIMEDIA (ISM), 2012, Irvine, CA. **Proceedings...** IEEE, 2012. p. 445–450.

REYE, J. Student modelling based on belief networks. **International Journal of Artificial Intelligence in Education**, Amsterdam, v. 14, n. 1, p. 63–96, 2004.

RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. **Artificial Intelligence: a modern approach**. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

SEFFRIN, H.; JAQUES, P. Modelando o conhecimento algébrico do estudante através de Redes Bayesianas Dinâmicas. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2014, Dourados, MT. **Anais...** Sociedade Brasileira de Computação, 2014.

SEFFRIN, H.; RUBI, G.; CARLOTTO, T.; MELLO, G.; JAQUES, P. A. Um resolvidor de equações algébricas como ferramenta de apoio à sala de aula no ensino de equações algébricas. In: XV WORKSHOP SOBRE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 2009, Bento Gonçalves. **Anais...** Sociedade Brasileira de Computação, 2009. p. 1791–1800.

SEFFRIN, H.; RUBI, G.; CRUZ, B.; DAMASCENO, F.; JAQUES, P. PATEquation: um objeto de aprendizagem para apoio a prática de resolução de equações. In: V LATIN-AMERICAN CONFERENCE ON LEARNING OBJECTS, 2010, São Paulo, SP. **Proceedings...** Latin-American Community on Learning Objects, 2010.

SEFFRIN, H.; RUBI, G.; GHILARDI, C.; MORAIS, F. D.; JAQUES, P.; ISOTANI, S.; BITTENCOURT, I. I. Dicas inteligentes no sistema tutor inteligente PAT2Math. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2012, Rio de Janeiro ,RJ. **Anais...** Sociedade Brasileira de Computação, 2012. v. 6.

SEFFRIN, H.; RUBI, G.; JAQUES, P. O Modelo Cognitivo do Sistema Tutor Inteligente PAT2Math. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2011, Aracaju, SE. **Anais...** Sociedade Brasileira de Computação, 2011. p. 10–19.

SEFFRIN, H.; RUBI, G.; JAQUES, P. Uma Rede Bayesiana aplicada à Modelagem do Conhecimento Algébrico do Aprendiz. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2013, Campinas, SP. **Anais...** Sociedade Brasileira de Computação, 2013.

SEFFRIN, H.; RUBI, G.; JAQUES, P. A Dynamic Bayesian Network for Inference of Learners Algebraic Knowledge. In: SYMPOSIUM ON APPLIED COMPUTING, 29., 2014, Gyeongju, Korea. **Proceedings...** ACM Press, 2014.

SELF, J. A. Bypassing the intractable problem of student modelling. In: **Intelligent tutoring systems: at the crossroads of artificial intelligence and education**. Norwood, NJ: Ablex, 1990. p. 107–123.

STEENBERGEN-HU, S.; COOPER, H. A meta-analysis of the effectiveness of intelligent tutoring systems on K–12 students' mathematical learning. **Journal of Educational Psychology**, Washington, DC, v. 105, p. 970–987, 2013.

STEENBERGEN-HU, S.; COOPER, H. A meta-analysis of the effectiveness of intelligent tutoring systems on college students' academic learning. **Journal of Educational Psychology**, Washington, DC, v. 106, p. 331–347, 2014.

TRELLA, M.; CARMONA, C.; CONEJO, R. MEDEA: an open service-based learning platform for developing intelligent educational systems for the web. In: WORKSHOP ON ADAPTIVE SYSTEMS FOR WEBBASED EDUCATION AT 12TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN EDUCATION, 2005, Amsterdam, The Netherlands. **Proceedings...** IOS Press, 2005. p. 27–34.

VANLEHN, K. The Behavior of Tutoring Systems. **International Journal of Artificial Intelligence in Education**, Amsterdam, The Netherlands, v. 16, n. 3, p. 227–265, 2006.

VANLEHN, K. Intelligent Tutoring Systems for Continuous, Embedded Assessment. In: DWYER, C. A. (Ed.). **The Future of assessment: shaping teaching and learning**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 113–138.

VANLEHN, K. The Relative Effectiveness of Human Tutoring, Intelligent Tutoring Systems, and Other Tutoring Systems. **Educational Psychologist**, Washington, DC, v. 46, n. 4, p. 197–221, Oct. 2011.

WOOLF, B.; MCDONALD, D. Building a Computer Tutor: design issues. **Computer**, Piscataway, NJ, v. 17, n. 9, p. 61–73, 1984.

WOOLF, B. P. **Building intelligent interactive tutors**. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 2008. 467 p. v. 3.

YUDELSON, M. V.; KOEDINGER, K.; GORDON, G. J. Individualized Bayesian Knowledge Tracing Models. In: ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN EDUCATION, 2013, Memphis, TN. **Proceedings...** Springer Verlag, 2013. p. 171–180. (Lecture Notes in Computer Science, v. 7926).

APÊNDICE A ARTIGOS PUBLICADOS

Neste capítulo são apresentados os artigos que foram publicados no período de 2013 e 2014/2. Estes artigos estão diretamente relacionados com o trabalho proposto, representando o esforço realizado até o momento.

- SEFFRIN, H.; RUBI, G.; JAQUES, P. Uma Rede Bayesiana aplicada à Modelagem do Conhecimento Algébrico do Aprendiz. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 2013, Campinas, SP. Anais... Sociedade Brasileira de Computação, 2013. (Qualis B2).

Neste trabalho é abordado o desenvolvimento da primeira versão da rede Bayesiana desta dissertação. O objetivo desta rede foi inferir se um estudante é capaz de aplicar corretamente uma operação algébrica de 1º grau. Para isto, foram utilizados os dados de um mapa conceitual algébrico para modelar a estrutura da rede. Este mapa foi elaborado tendo como base informações levantadas por uma professora de matemática, e ele descreve a relação entre as operações algébricas de 1º grau, as operações que se deve aprender primeiramente para que seja possível compreender as seguintes. Diferentemente de outros trabalhos na área, esta rede infere o conhecimento a partir de cada passo resolvido pelo aluno ao resolver uma equação, no lugar de realizar a inferência a partir do sucesso na resposta final. Uma avaliação foi conduzida com a rede e o seu resultado foi comparado com a opinião de uma especialista. Os resultados mostraram similaridade significativa entre as avaliações da rede e os dados da especialista.

- SEFFRIN, H. ; RUBI, G. ; JAQUES, P . A Dynamic Bayesian Network for Inference of Learners Algebraic Knowledge. In: 29th Symposium On Applied Computing (ACM-SAC), 2014, Gyeongju, Korea. Proceedings... New York: ACM, 2014. (Qualis A1).

Dando continuidade ao trabalho anterior, neste trabalho a rede é portada para uma estrutura de Redes Bayesianas Dinâmicas (RBD). Esta nova proposta visava tornar a rede independente dos exercícios, ou seja, para cada exercício, não há necessidade de alteração na rede, como ocorria no trabalho anterior. Isto porque, na estrutura de RBD, cada *time slice* corresponde a aplicação de uma operação em um passo da equação. Na sua avaliação, foram utilizadas equações aplicadas em sala de aula. A operação aplicada pelos alunos em cada passo foi inserida na rede como evidência. Ao final, o resultado de inferência da rede foi comparado com a opinião da especialista. Os resultados mostraram uma similaridade significativa entre os resultados da rede e da avaliação da especialista.

- SEFFRIN, H. ; JAQUES, P. . Modelando o conhecimento algébrico do estudante através de Redes Bayesianas Dinâmicas. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2014, Dourados. Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2014. (Qualis B2).

Este artigo descreve a primeira etapa do desenvolvimento da rede Bayesiana desta dissertação: a definição da estrutura final da rede. Esta combina os principais conceitos da álgebra, com as operações de 1º grau e as principais falsas concepções, cujos nodos-sensores são a (in)correta aplicação de uma operação para resolver um passo de uma equação, e as principais falsas concepções que o estudante possa cometer durante a resolução da equação. A estrutura da rede foi, então, submetida a uma avaliação: foram conduzidas entrevistas com professores de matemática, de modo a verificar a validade da mesma. Através destas entrevistas, alterações foram sendo realizadas na rede: nodos foram removidos, outros foram adicionados e alguns foram realocados. Estas entrevistas, também permitiram obter algumas das principais falsas concepções a serem inclusas na versão final da rede.

A seguir é apresentado um artigo publicado no ano de 2013, na qual descreve o desenvolvimento do módulo especialista do PAT2Math.

- JAQUES, P. A.; SEFFRIN, H.; RUBI, G.; MORAIS, F. de; GHILARDI, C.; BITTENCOURT, I. I.; ISOTANI, S. Rule-based expert systems to support step-by-step guidance in algebraic problem solving: the case of the tutor pat2math. *Expert Systems with Applications*, The Netherlands, v. 40, n. 14, p. 5456-5465, 2013. (Qualis A1).

Neste artigo é descrito o desenvolvimento do módulo especialista do Sistema Tutor Inteligente PAT2Math. Este foi implementado como um sistema especialista, codificando cada regra do domínio, operações algébricas, em regras de produção. Tais regras conferem ao sistema a capacidade de: (i) resolver uma equação passo-a-passo, para demonstrar ao aluno como uma equação é resolvida corretamente; (ii) prover a correção das respostas submetidas pelo aluno. O sistema também conta com um outro conjunto de regras responsáveis por reduzir o tempo de correção, uma vez que, esta baseia-se em encontrar um conjunto de regras que permite ao sistema chegar à resposta do aluno. Este conjunto extra remove alguns caminhos de resolução desnecessários. Também é apresentado um quase-experimento com turmas de 7ª série, utilizando o módulo de resolução PATequation, a interface do PAT2Math. Os resultados desse mostraram um ganho estatisticamente significativo de desempenho dos alunos ao resolver equações usando o PAT2Math.

APÊNDICE B QUESTIONÁRIO UTILIZADO NA OBTENÇÃO DAS PROBABILIDADES DA REDE



Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPICA)
 Avaliando o conhecimento algébrico do estudante
 através de Redes Bayesianas dinâmicas
 Henrique Manfron Seffrin
 Orientadora: Dra. Patricia Jaques Maillard

Considerando que um estudante saiba aplicar corretamente a operação de multiplicação, porém desconhece a propriedade distributiva. Considerando qualquer equação de 1º grau que envolva a operação de multiplicação e a propriedade distributiva, o quão provável é este aluno de acertar tais equações?

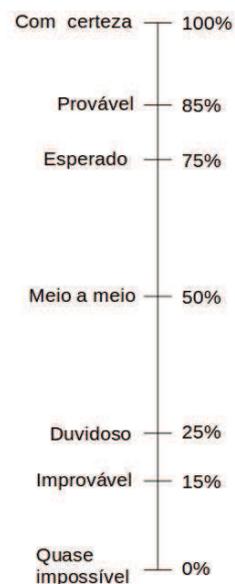


Considerando que um aluno é capaz de calcular corretamente o mínimo múltiplo comum, o quanto você considera que ele é capaz de resolver corretamente uma soma de frações?



Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPICA)
 Avaliando o conhecimento algébrico do estudante
 através de Redes Bayesianas dinâmicas
 Henrique Manfron Seffrin
 Orientadora: Dra. Patricia Jaques Maillard

Um aluno é capaz de separar corretamente os termos de uma equação, com incógnitas de um lado da equação e constantes do outro. O quão provável é ele possuir o conhecimento sobre o que é uma incógnita? E uma constante?

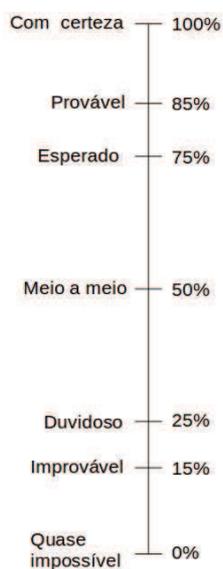
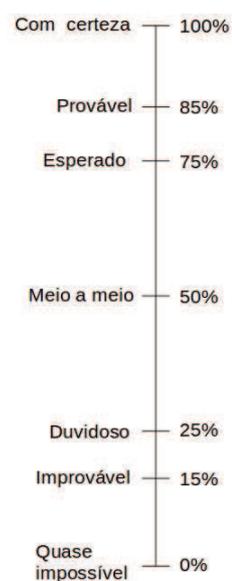


Sabendo que um aluno é capaz de aplicar corretamente a operação de adição, porém desconhece a propriedade associativa, o quão provável é deste aluno resolver corretamente as equações que envolvam tal operação?



Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPICA)
 Avaliando o conhecimento algébrico do estudante
 através de Redes Bayesianas dinâmicas
 Henrique Manfron Seffrin
 Orientadora: Dra. Patricia Jaques Maillard

Sabendo que um aluno é capaz de aplicar corretamente a operação de adição, porém desconhece a propriedade comutativa, o quanto provável é deste aluno resolver corretamente as equações que envolvam tal operação?

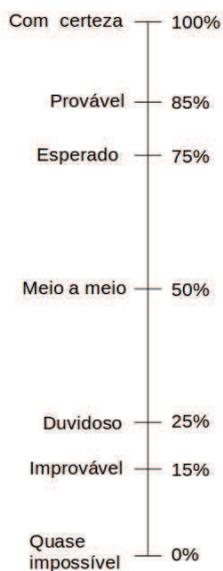


Desconhecendo a propriedade comutativa da multiplicação quais as chances deste aluno resolver corretamente uma equação de 1º grau que envolva a multiplicação?



Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPICA)
 Avaliando o conhecimento algébrico do estudante
 através de Redes Bayesianas dinâmicas
 Henrique Manfron Seffrin
 Orientadora: Dra. Patricia Jaques Maillard

Desconhecendo a propriedade associativa da multiplicação quais as chances deste aluno resolver corretamente uma equação de 1º grau que envolva a multiplicação?

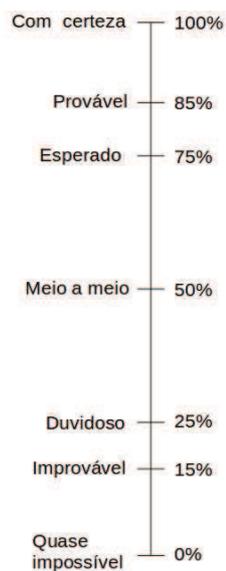


Conhecendo as 4 operações fundamentais, o quão provável é do aluno ser capaz de realizar corretamente uma operação envolvendo o sinal negativo?



Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPICA)
 Avaliando o conhecimento algébrico do estudante
 através de Redes Bayesianas dinâmicas
 Henrique Manfron Seffrin
 Orientadora: Dra. Patricia Jaques Maillard

Considerando que um estudante consiga realizar a multiplicação de frações, quais as chances dele resolver uma divisão de frações?

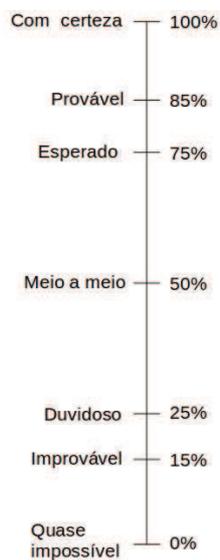


Considerando que um estudante consiga organizar uma equação, ou seja, separar corretamente incógnitas e constantes em lados distintos da equação. Quais as chances deste aluno conhecer a propriedade da igualdade entre os termos da equação?



Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPICA)
 Avaliando o conhecimento algébrico do estudante
 através de Redes Bayesianas dinâmicas
 Henrique Manfron Seffrin
 Orientadora: Dra. Patricia Jaques Maillard

Considerando que este aluno conheça a propriedade da igualdade entre os termos da equação. O quão provável é este aluno conhecer o princípio aditivo? E o multiplicativo?



Um estudante é capaz de aplicar corretamente o princípio aditivo, o quão provável é ele compreender a operação inversa?

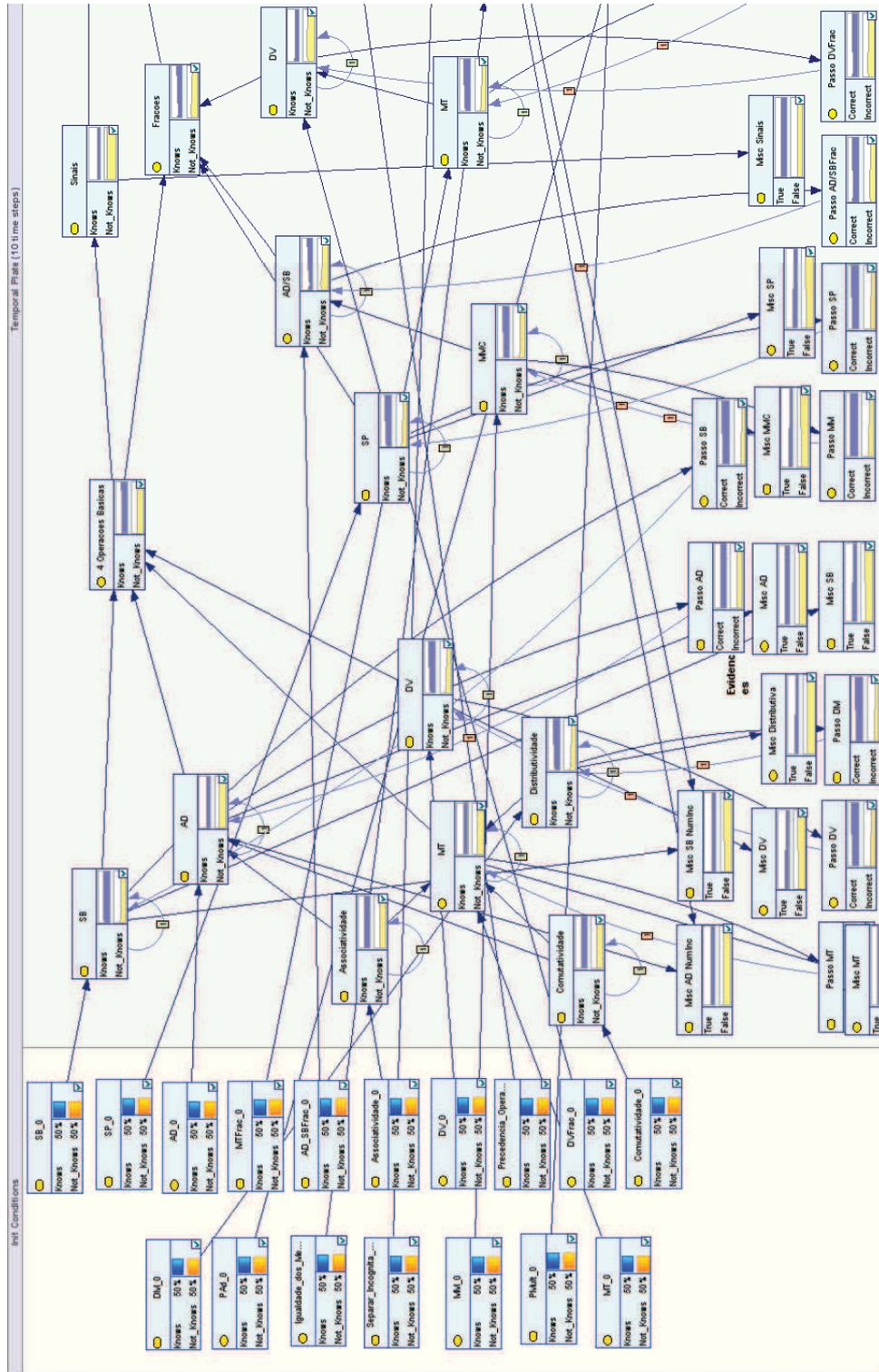


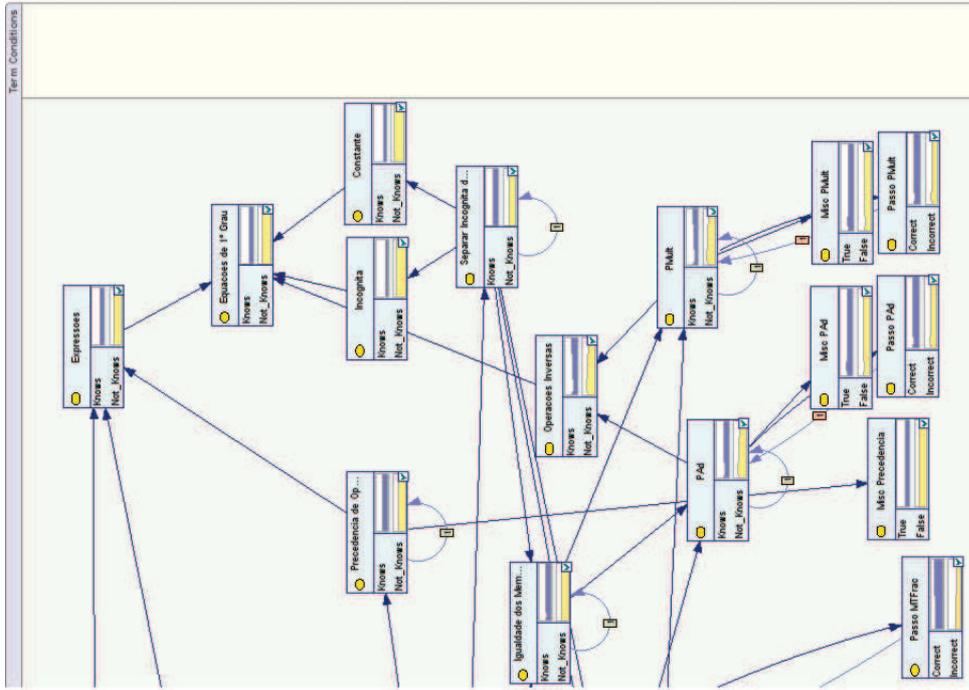
Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada (PIPICA)
Avaliando o conhecimento algébrico do estudante
através de Redes Bayesianas dinâmicas
Henrique Manfron Seffrin
Orientadora: Dra. Patricia Jaques Maillard

Um estudante é capaz de aplicar corretamente o princípio multiplicativo, o quão provável é ele compreender a operação inversa?



APÊNDICE C REDE COMPLETA





APÊNDICE D PÓS-TESTES APLICADOS NAS TURMAS DE 7ª SÉRIE

Nome:

Turma: 71

Pós-teste de Matemática:

Resolva os exercícios abaixo. O teste é individual e sem consulta, e tem por objetivo verificar o quanto você sabe atualmente de equações. Resolva as questões com calma e atenção. Tenha um ótimo teste!

1. Considere x um número qualquer e represento-o por meio de expressões algébricas. (1,0)
 - a. A metade de x somado com 7.
 - b. O dobro da soma de x com 9.

2. Sendo x um número racional, resolva as equações. (1,0)
 - a. $x - 17 = 21$
 - b. $110 + x = 6$

3. Sendo x um número racional, resolva as equações. (4,0)
 - a. $-4x + 2 = 12 - 2x$
 - b. $-7x = 35$
 - c. $\frac{x}{6} = -3$
 - d. $\frac{2x}{-3} = 10 + x$
 - e. $5x + 10 = 30$

4. Sendo x um número racional, resolva as equações. (4,0)
 - a. $4(x+1) - 6 = 1(x+2)$
 - b. $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 10$
 - c. $3(-x - 1) - 5 = 5x - 11$
 - d. $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = \frac{12}{5} + x$

Nome:

Turma: 72

Pós-teste de Matemática:

Resolva os exercícios abaixo. O teste é individual e sem consulta, e tem por objetivo verificar o quanto você sabe atualmente de equações. Resolva as questões com calma e atenção. Tenha um ótimo teste!

Proposta de pré-teste de Matemática:

1. Considere x um número qualquer e represento-o por meio de expressões algébricas. (1,0)
 - a. A metade de x somado com 3.
 - b. O dobro da soma de x com 5.
2. Sendo x um número racional, resolva as equações. (1,0)
 - a. $x - 15 = 21$
 - b. $106 + x = 4$
3. Sendo x um número racional, resolva as equações. (4,0)
 - a. $-4x + 2 = 17 + x$
 - b. $-12x = 48$
 - c. $\frac{x}{2} = -5$
 - d. $\frac{2x}{-2} = 12 + x$
 - e. $5x + 10 = 40$
4. Sendo x um número racional, resolva as equações. (4,0)
 - a. $5(x+1) - 2 = 2(x+2)$
 - b. $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 12$
 - c. $3(-x - 1) - 2 = 4x - 11$
 - d. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = \frac{14}{5} + x$

APÊNDICE E RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DO PÓS-TESTE

Aluno	x-15=21		106+x=4		-4x+2=17+x				-12x=48		x/2=-5			2x/-2=12+x					5x+10=40									
	AD	PA	SB	PA	SB	PA	AD	SP	PM	SP	PM	MM	MT	PM	PM	MM	MT	DM	PA	AD	SP	PA	SB	PM	SP			
1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1			
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	0	0	-1	1	0	1	0	0	-1	0	1	1			
4	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	0	1	-1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1			
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	1	0	-1	1	0	1	1	-1	1	1			
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	1			
8	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	-1	1	0	0	1	1	0	1	1	1			
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1			
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	-1	1	0	1	1	0	1	1			
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	-1	1	1	1	1			
13	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0			
14	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	-1	0	1	1	-1	1	1			
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1			
16	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1			
17	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1			
18	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	-1	1	0	-1	1	1	1	1			
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1			
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1			
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	1	1	1			
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	-1	1	0	1	1	1	1	1			
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1			
27	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1			
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1			
29	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	-1	1	0	1	-1	0	1	1			
Aluno	x-17=21		110+x=6		-4x+2=12-2x				-7x=35		x/6=-3			2x/-3=10+x					5x+10=30									
	PA	AD	PA	SB	PA	AD	SB	PM	SP	PM	SP	PM	MM	MT	MM	PM	MT	PA	DM	SB	PM	SP	PA	SB	PM	SP		
30	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	-1	0	0	1	0	0	1	-1	1	1	1	1	
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	1	-1	1	1	1	1	
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	
34	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	-1	0	-1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
37	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
40	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	-1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	-1	
41	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	
42	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	
44	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	0	1	0	-1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	
45	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
46	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	
47	1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
48	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
51	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
53	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	0	1	1	-1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	-1	
54	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
55	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	0	1	-1	1	0	1	1	0	-1	1	1	1	1	1	1	
56	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	-1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	
58	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	
59	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	

Aluno	5(x+1)-2=2(x+2)							x/2+x/4=12					3(-x-1)-2=4x-11						x/4+x/5=14/5+x										
	DM	DM	PA	AD	SB	PA	PM	AF	MM	AD	PM	MT	SP	DM	PA	PA	AD	SB	PM	SP	AF	AD	MM	MT	PA	SB	PM	SP	
1	1	1	1	-1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	
3	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	-1	0	1	1	1	1	1	-1	0	
4	1	1	1	-1	1	1	1	-1	0	1	1	0	1	1	-1	1	1	1	1	1	0	1	1	-1	1	1	1	0	
5	1	1	1	1	-1	1	1	0	-1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	-1	1	1	1	0	
7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	-1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
8	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
9	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
10	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	-1	0	1	0	
11	1	1	-1	1	-1	1	-1	0	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	0	1	1	1	-1	0	1	0	
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
15	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
16	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	-1	1	0	
17	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	0	0	1	1	1	1	-1	1	0	
18	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	
19	1	1	1	1	-1	1	1	0	1	1	1	-1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
20	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	1	1	0	1	-1	1	0	-1	1	-1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
23	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
26	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	
27	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
28	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
29	-1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	-1	0	1	0
Aluno	4(x+1)-6=1(x+2)							x/3+x/2=10					3(-x-1)-5=5x-11						x/5+x/4=12/5+x										
	DM	DM	PA	PA	AD	SB	PM	AF	MM	MT	AD	PM	SP	DM	PA	PA	AD	SB	PM	SP	AF	AD	MM	MT	PA	SB	PM	SP	
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	0	1	0	
31	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
32	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
33	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
36	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
37	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
38	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
39	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
40	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	-1	
41	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
42	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	
44	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	-1	
45	1	1	1	1	-1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	1	1	1	1	1	0	
46	1	1	1	1	-1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	1	1	1	-1	1	0	
47	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	-1	0	
48	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	
50	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	
51	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	-1	1	1	1	1	0	
53	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	0	0	1	-1	1	1	1	1	0	
54	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	
55	1	1	1	1	1	-1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	
56	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	-1	1	1	1	0	
58	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	
59	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	-1	1	1	1	-1	1	0	

APÊNDICE F RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DA REDE

ID	AD			SB			MT			DM			SP		
	Aluno	Rede	Diff.	Aluno	Rede	Diff.	Aluno	Rede	Diff.	Aluno	Rede	Diff.	Aluno	Rede	Diff.
1	0,83	0,84	0,01	0,83	0,92	0,09	1	0,81	0,19	1	0,9	0,1	1	0,88	0,12
3	0,83	0,86	0,03	1	0,89	0,11	1	0,9	0,1	1	0,98	0,02	0,5	0,79	0,29
4	0,85	0,84	0,01	1	0,93	0,07	0,33	0,92	0,59	1	0,93	0,07	0,83	0,94	0,11
5	1	0,49	0,51	0,83	0,67	0,16	1	0,57	0,43	1	0,85	0,15	0,83	0,99	0,16
7	1	0,9	0,1	1	0,93	0,07	1	0,83	0,17	1	0,91	0,09	1	0,8	0,2
8	1	0,8	0,2	0,83	0,89	0,06	1	0,86	0,14	1	0,91	0,09	1	0,76	0,24
9	0,85	0,82	0,03	1	0,94	0,06	1	0,85	0,15	1	0,92	0,08	1	0,9	0,1
10	1	0,73	0,27	1	0,88	0,12	1	0,85	0,15	1	0,81	0,19	1	0,83	0,17
11	1	0,982	0,0174	0,8	0,888	0,088	1	0,869	0,13	1	0,881	0,118	0,83	0,833	0,003
13	1	0,33	0,67	1	0,93	0,07	0	0,65	0,65	0	0,75	0,75	1	0,98	0,02
14	1	0,7	0,3	1	0,94	0,06	0,75	0,75	0	1	0,89	0,11	0,83	0,08	0,75
15	1	0,77	0,23	1	0,78	0,22	1	0,85	0,15	1	0,98	0,02	1	0,96	0,04
16	1	0,92	0,08	0,66	0,87	0,21	1	0,93	0,07	1	0,91	0,09	1	0,96	0,04
17	1	0,84	0,16	0,66	0,84	0,18	1	0,92	0,08	1	0,91	0,09	0,75	0,99	0,24
18	1	0,82	0,18	1	0,92	0,08	0,75	0,88	0,13	1	0,92	0,08	0,83	0,57	0,26
19	0,83	0,98	0,15	0,83	0,93	0,1	0,66	0,92	0,26	1	0,95	0,05	0,66	0,81	0,15
20	1	0,9	0,1	1	0,91	0,09	1	0,9	0,1	1	0,91	0,09	1	0,91	0,09
21	1	0,88	0,12	1	0,93	0,07	1	0,93	0,07	0	0,91	0,91	1	0,74	0,26
22	0,83	0,87	0,04	1	0,96	0,04	1	0,9	0,1	0,66	0,94	0,28	1	0,81	0,19
23	1	0,85	0,15	1	0,91	0,09	1	0,73	0,27	1	0,83	0,17	1	0,99	0,01
26	1	0,64	0,36	1	0,76	0,24	1	0,61	0,39	1	0,8	0,2	1	0,86	0,14
27	1	0,8	0,2	0,75	0,96	0,21	1	0,79	0,21	0,5	0,87	0,37	1	0,98	0,02
28	1	0,76	0,24	1	0,92	0,08	1	0,84	0,16	0,75	0,91	0,16	1	0,97	0,03
29	0,85	0,76	0,09	1	0,77	0,23	1	0,84	0,16	0,66	0,91	0,25	1	0,97	0,03
30	1	0,99	0,01	0,8	0,85	0,05	1	0,87	0,13	1	0,87	0,13	0,8	0,8	0
31	1	0,84	0,16	1	0,88	0,12	1	0,92	0,08	1	0,85	0,15	0,83	0,99	0,16
32	1	0,91	0,09	1	0,91	0,09	1	0,91	0,09	1	0,92	0,08	1	0,96	0,04
33	1	0,89	0,11	1	0,87	0,13	1	0,9	0,1	1	0,92	0,08	0,8	0,97	0,17
34	1	0,82	0,18	0,6	0,8	0,2	0	0,92	0,92	0	0,91	0,91	0,33	0,99	0,66
36	1	0,86	0,14	1	0,89	0,11	0,75	0,9	0,15	1	0,98	0,02	1	0,95	0,05
37	0,83	0,88	0,05	1	0,9	0,1	1	0,89	0,11	1	0,91	0,09	1	0,98	0,02
38	1	0,87	0,13	1	0,83	0,17	1	0,66	0,34	1	0,85	0,15	1	0,78	0,22
39	1	0,76	0,24	0,85	0,93	0,08	1	0,88	0,12	1	0,9	0,1	1	0,97	0,03
40	1	0,79	0,21	0,85	0,93	0,08	1	0,91	0,09	1	0,93	0,07	0,66	0,98	0,32
41	0,83	0,97	0,14	1	0,92	0,08	1	0,76	0,24	0,75	0,83	0,08	1	0,91	0,09
42	1	0,68	0,32	1	0,85	0,15	0	0,84	0,84	0	0,83	0,83	0	0,98	0,98
44	0,83	0,91	0,08	1	0,92	0,08	1	0,94	0,06	1	0,93	0,07	0,71	0,98	0,27
45	0,83	0,92	0,09	1	0,92	0,08	1	0,85	0,15	1	0,89	0,11	0,83	0,13	0,7
46	0,83	0,19	0,64	0,85	0,96	0,11	1	0,65	0,35	1	0,9	0,1	1	0,83	0,17
47	0,8	0,92	0,12	0,83	0,95	0,12	1	0,88	0,12	1	0,92	0,08	1	0,85	0,15
48	1	0,95	0,049	0,857	0,931	0,074	1	0,83	0,17	1	0,894	0,1059	1	0,76	0,23
50	1	0,95	0,05	1	0,94	0,06	1	0,83	0,17	1	0,92	0,08	1	0,77	0,23
51	1	0,87	0,13	1	0,3	0,7	1	0,81	0,19	1	0,91	0,09	1	0,97	0,03
53	1	0,88	0,12	0,85	0,96	0,11	1	0,84	0,16	1	0,89	0,11	0	0,12	0,12
54	1	0,76	0,24	1	0,9	0,1	1	0,84	0,16	1	0,91	0,09	0,85	0,98	0,13
55	1	0,78	0,22	0,5	0,93	0,43	0,75	0,9	0,15	1	0,92	0,08	0,8	0,98	0,18
56	1	0,95	0,05	0,85	0,93	0,08	0,75	0,88	0,13	1	0,91	0,09	1	0,74	0,26
58	1	0,96	0,04	1	0,91	0,09	1	0,85	0,15	1	0,89	0,11	1	0,88	0,12
59	0,83	0,75	0,08	0,71	0,89	0,18	1	0,78	0,22	1	0,8	0,2	1	0,96	0,04

ID	PA			PM			MM			AF		
	Aluno	Rede	Diff.	Aluno	Rede	Diff.	Aluno	Rede	Diff.	Aluno	Rede	Diff.
1	1	0,81	0,19	1	0,84	0,16	1	0,76	0,24	0	0,66	0,66
3	0,9	0,9	0	0,87	0,94	0,07	0,75	0,36	0,39	0	0,23	0,23
4	0,81	0,94	0,13	1	0,98	0,02	1	0,74	0,26	0	0,63	0,63
5	1	0,89	0,11	0,88	0,9	0,02	0	0,81	0,81	0	0,73	0,73
7	0,9	0,96	0,06	1	0,98	0,02	0,75	0,73	0,02	0	0,62	0,62
8	1	0,92	0,08	0,8	0,96	0,16	1	0,74	0,26	0	0,64	0,64
9	1	0,98	0,02	1	0,99	0,01	1	0,94	0,06	1	0,85	0,15
10	0,9	0,98	0,08	0,85	0,94	0,09	0,75	0,73	0,02	0	0,61	0,61
11	0,6363	0,926	0,29	0,875	0,963	0,088	1	0,930	0,069	0	0,885	0,885
13	0,6	0,9	0,3	1	0,92	0,08	0	0,73	0,73	0	0,63	0,63
14	1	0,95	0,05	0,875	0,98	0,105	1	0,93	0,07	0	0,86	0,86
15	1	0,92	0,08	0,77	0,95	0,18	1	0,83	0,17	0	0,76	0,76
16	1	0,89	0,11	1	0,9	0,1	1	0,92	0,08	0	0,84	0,84
17	0,9	0,88	0,02	0,75	0,88	0,13	1	0,73	0,27	0	0,61	0,61
18	0,8	0,93	0,13	1	0,95	0,05	0,75	0,74	0,01	0	0,63	0,63
19	1	0,96	0,04	1	0,92	0,08	1	0,73	0,27	0	0,61	0,61
20	1	0,92	0,08	1	0,95	0,05	1	0,84	0,16	0	0,76	0,76
21	0	0,94	0,94	1	0,99	0,01	1	0,74	0,26	0	0,64	0,64
22	1	0,97	0,03	0,85	0,9	0,05	0,5	0,74	0,24	0	0,61	0,61
23	1	0,93	0,07	1	0,96	0,04	0,66	0,85	0,19	0	0,76	0,76
26	0,9	0,93	0,03	1	0,97	0,03	1	0,74	0,26	0	0,64	0,64
27	1	0,96	0,04	1	0,93	0,07	1	0,73	0,27	0	0,58	0,58
28	1	0,92	0,08	1	0,95	0,05	1	0,78	0,22	0	0,76	0,76
29	0,81	0,93	0,12	1	0,95	0,05	0,75	0,74	0,01	0	0,64	0,64
30	1	0,92	0,08	0,88	0,96	0,08	0,66	0,92	0,26	0,5	0,88	0,38
31	1	0,89	0,11	1	0,9	0,1	0,75	0,96	0,21	0	0,89	0,89
32	1	0,94	0,06	1	0,98	0,02	0,75	0,73	0,02	0	0,63	0,63
33	1	0,92	0,08	1	0,96	0,04	0,75	0,74	0,01	0	0,63	0,63
34	1	0,89	0,11	0,33	0,92	0,59	0	0,73	0,73	0	0,59	0,59
36	1	0,92	0,08	1	0,95	0,05	0,75	0,74	0,01	0	0,63	0,63
37	1	0,92	0,08	1	0,96	0,04	0,75	0,74	0,01	0	0,64	0,64
38	1	0,92	0,08	1	0,96	0,04	0,66	0,96	0,3	0	0,91	0,91
39	1	0,91	0,09	1	0,92	0,08	1	0,9	0,1	0	0,82	0,82
40	1	0,91	0,09	1	0,93	0,07	0,66	0,74	0,08	0	0,63	0,63
41	1	0,96	0,04	1	0,9	0,1	1	0,73	0,27	0	0,57	0,57
42	0	0,9	0,9	0	0,93	0,93	0	0,73	0,73	0	0,61	0,61
44	0,9	0,91	0,01	0,88	0,92	0,04	1	0,74	0,26	0	0,63	0,63
45	1	0,92	0,08	1	0,95	0,05	1	0,74	0,26	0	0,63	0,63
46	0,9	0,91	0,01	0,875	0,9	0,025	0,75	0,74	0,01	0	0,63	0,63
47	1	0,95	0,05	0,85	0,98	0,13	1	0,73	0,27	0	0,62	0,62
48	0,9	0,934	0,0347	1	0,926	0,073	0,75	0,74	0,009	0	0,636	0,636
50	1	0,94	0,06	1	0,98	0,02	1	0,73	0,27	0	0,63	0,63
51	1	0,58	0,42	0,88	0,57	0,31	0,66	0,74	0,08	0	0,63	0,63
53	1	0,94	0,06	0,875	0,95	0,075	0,5	0,74	0,24	0	0,63	0,63
54	1	0,93	0,07	1	0,95	0,05	1	0,76	0,24	0	0,66	0,66
55	0,8	0,91	0,11	1	0,92	0,08	0,75	0,74	0,01	0	0,64	0,64
56	1	0,96	0,04	1	0,98	0,02	0,66	0,73	0,07	0	0,62	0,62
58	1	0,93	0,07	0,875	0,98	0,105	0,75	0,74	0,01	0	0,63	0,63
59	1	0,92	0,08	1	0,96	0,04	1	0,74	0,26	0	0,64	0,64

APÊNDICE G RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DA REDE COM LIMIARES

ID	AD					SB					MT				
	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.
1	0,83	1	0,17	0,84	0,01	0,83	1	0,17	0,92	0,09	1	0,94	0,06	0,86	0,14
3	0,83	1	0,17	0,87	0,04	1	1	0	0,89	0,11	1	1	0	0,91	0,09
4	0,85	0,88	0,03	0,86	0,01	1	1	0	1	0	0,66	1	0,34	0,95	0,29
5	1	0,62	0,38	0,5	0,5	0,83	0,76	0,07	0,68	0,15	1	0,73	0,27	0,58	0,42
7	1	0,95	0,05	0,9	0,1	1	1	0	0,93	0,07	1	0,92	0,08	0,88	0,12
8	1	0,88	0,12	0,81	0,19	0,83	1	0,17	0,89	0,06	1	1	0	0,91	0,09
9	0,85	1	0,15	0,83	0,02	1	1	0	0,94	0,06	1	1	0	0,89	0,11
10	1	0,86	0,14	0,74	0,26	1	1	0	0,88	0,12	1	0,95	0,05	0,9	0,1
11	1	1	0	1	0	0,8	1	0,2	0,88	0,08	1	0,93	0,07	0,87	0,13
13	1	0,62	0,38	0,33	0,67	1	1	0	0,93	0,07	0	0,72	0,72	0,65	0,65
14	1	0,83	0,17	0,71	0,29	1	1	0	0,94	0,06	0,75	0,88	0,13	0,78	0,03
15	1	1	0	0,77	0,23	1	0,82	0,18	0,78	0,22	1	1	0	0,86	0,14
16	1	1	0	0,92	0,08	0,66	1	0,34	0,98	0,32	1	1	0	0,95	0,05
17	1	0,85	0,15	0,84	0,16	0,66	1	0,34	0,84	0,18	1	0,94	0,06	0,92	0,08
18	1	0,87	0,13	0,83	0,17	1	1	0	1	0	0,75	0,96	0,21	0,93	0,18
19	0,83	1	0,17	1	0,17	0,83	1	0,17	1	0,17	0,66	1	0,34	0,94	0,28
20	1	1	0	0,91	0,09	1	1	0	0,92	0,08	1	1	0	0,94	0,06
21	1	1	0	0,89	0,11	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
22	0,83	0,9	0,07	0,87	0,04	1	1	0	0,96	0,04	1	0,96	0,04	0,9	0,1
23	1	1	0	0,85	0,15	1	1	0	0,91	0,09	1	0,93	0,07	0,83	0,17
26	1	0,68	0,32	0,64	0,36	1	0,8	0,2	0,76	0,24	1	0,69	0,31	0,65	0,35
27	1	1	0	0,8	0,2	0,75	1	0,25	0,96	0,21	1	0,91	0,09	0,78	0,22
28	1	1	0	0,77	0,23	1	1	0	0,92	0,08	1	1	0	0,88	0,12
29	0,85	0,78	0,07	0,76	0,09	1	0,8	0,2	0,77	0,23	1	0,89	0,11	0,87	0,13
30	1	1	0	1	0	0,8	1	0,2	0,88	0,08	1	0,93	0,07	0,87	0,13
31	1	1	0	0,84	0,16	1	1	0	0,88	0,12	1	1	0	0,92	0,08
32	1	1	0	0,91	0,09	1	1	0	0,91	0,09	1	1	0	0,95	0,05
33	1	1	0	0,9	0,1	1	1	0	0,87	0,13	1	1	0	0,91	0,09
34	1	0,84	0,16	0,82	0,18	0,6	1	0,4	0,8	0,2	0	0,73	0,73	0,92	0,92
36	1	1	0	0,87	0,13	1	1	0	0,9	0,1	0,75	1	0,25	0,91	0,16
37	0,83	1	0,17	0,89	0,06	1	1	0	0,9	0,1	1	1	0	0,91	0,09
38	1	0,9	0,1	0,87	0,13	1	1	0	0,94	0,06	1	0,7	0,3	0,66	0,34
39	1	0,89	0,11	0,76	0,24	0,85	1	0,15	0,93	0,08	1	1	0	0,88	0,12
40	1	0,81	0,19	0,79	0,21	0,85	1	0,15	0,93	0,08	1	0,95	0,05	0,95	0,05
41	0,83	1	0,17	0,97	0,14	1	1	0	0,92	0,08	1	0,86	0,14	0,76	0,24
42	1	0,94	0,06	0,68	0,32	1	1	0	0,85	0,15	0	0,92	0,92	0,84	0,84
44	0,83	1	0,17	0,92	0,09	1	1	0	0,92	0,08	1	1	0	0,97	0,03
45	0,83	1	0,17	0,9	0,07	1	1	0	0,91	0,09	1	1	0	0,9	0,1
46	0,83	0,25	0,58	0,19	0,64	0,85	1	0,15	0,96	0,11	1	0,83	0,17	0,69	0,31
47	0,8	1	0,2	0,92	0,12	0,83	1	0,17	0,95	0,12	1	1	0	0,89	0,11
48	1	1	0	0,93	0,07	0,857	1	0,143	1	0,143	1	1	0	0,89	0,11
50	1	1	0	0,96	0,04	1	1	0	0,94	0,06	1	1	0	0,93	0,07
51	1	1	0	0,87	0,13	1	0,32	0,68	0,3	0,7	1	1	0	0,83	0,17
53	1	1	0	0,81	0,19	0,89	1	0,11	1	0,11	1	1	0	0,9	0,1
54	1	0,88	0,12	0,77	0,23	1	1	0	0,9	0,1	1	0,95	0,05	0,86	0,14
55	1	0,94	0,06	0,78	0,22	0,5	1	0,5	1	0,5	0,75	1	0,25	0,92	0,17
56	1	1	0	0,96	0,04	0,85	1	0,15	1	0,15	0,75	1	0,25	0,89	0,14
58	1	1	0	0,96	0,04	1	1	0	0,91	0,09	1	1	0	0,89	0,11
59	0,83	1	0,17	0,75	0,08	0,71	1	0,29	0,89	0,18	1	0,89	0,11	0,78	0,22

ID	DM					SP					PA				
	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0,9	0,1	0,88	0,12
3	1	1	0	1	0	0,5	0,79	0,29	0,79	0,29	0,9	0,94	0,04	0,94	0,04
4	1	1	0	0,94	0,06	0,83	1	0,17	1	0,17	0,81	1	0,19	0,95	0,14
5	1	1	0	0,85	0,15	0,83	1	0,17	1	0,17	1	0,95	0,05	0,94	0,06
7	1	1	0	1	0	1	1	0	0,8	0,2	0,9	1	0,1	0,97	0,07
8	1	1	0	0,98	0,02	1	1	0	0,9	0,1	1	1	0	0,95	0,05
9	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
10	1	0,93	0,07	0,92	0,08	1	1	0	1	0	0,9	1	0,1	1	0,1
11	1	0,92	0,08	0,88	0,12	0,83	1	0,17	1	0,17	0,6363	0,95	0,3137	0,95	0,3137
13	0	0,59	0,59	0,75	0,75	1	1	0	1	0	0,6	1	0,4	0,95	0,35
14	1	1	0	0,92	0,08	0,83	0,445	0,385	0,445	0,385	1	1	0	0,96	0,04
15	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
16	1	1	0	0,94	0,06	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
17	1	0,92	0,08	0,91	0,09	0,75	1	0,25	1	0,25	0,9	0,94	0,04	0,94	0,04
18	1	1	0	1	0	0,83	0,57	0,26	0,57	0,26	0,8	1	0,2	0,95	0,15
19	1	1	0	0,96	0,04	0,66	1	0,34	1	0,34	1	1	0	0,99	0,01
20	1	1	0	0,98	0,02	1	0,94	0,06	0,94	0,06	1	1	0	0,95	0,05
21	0	1	1	0,93	0,93	1	1	0	1	0	0	1	1	0,95	0,95
22	0,66	1	0,34	0,94	0,28	1	1	0	0,82	0,18	1	1	0	1	0
23	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
26	1	0,87	0,13	0,87	0,13	1	1	0	1	0	0,9	0,95	0,05	0,95	0,05
27	0,5	0,9	0,4	0,86	0,36	1	1	0	1	0	1	1	0	0,99	0,01
28	0,75	1	0,25	1	0,25	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
29	0,66	1	0,34	0,8	0,14	1	1	0	1	0	0,81	1	0,19	0,95	0,14
30	1	0,91	0,09	0,87	0,13	0,8	1	0,2	1	0,2	1	1	0	0,95	0,05
31	1	1	0	0,91	0,09	0,83	1	0,17	1	0,17	1	1	0	0,95	0,05
32	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
33	1	1	0	0,92	0,08	0,8	1	0,2	0,97	0,17	1	1	0	0,95	0,05
34	0	0,92	0,92	0,91	0,91	0,33	1	0,67	1	0,67	1	0,95	0,05	0,95	0,05
36	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
37	1	1	0	0,93	0,07	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
38	1	0,84	0,16	0,85	0,15	1	1	0	1	0	1	1	0	0,94	0,06
39	1	1	0	0,91	0,09	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05
40	1	1	0	1	0	0,66	1	0,34	1	0,34	1	1	0	0,95	0,05
41	0,75	0,87	0,12	0,83	0,08	1	1	0	1	0	1	1	0	0,99	0,01
42	0	0,78	0,78	0,83	0,83	0	1	1	1	1	0	0,95	0,95	0,95	0,95
44	1	1	0	0,98	0,02	0,71	1	0,29	1	0,29	0,9	1	0,1	0,95	0,05
45	1	1	0	1	0	0,83	0,87	0,04	0,87	0,04	1	1	0	0,95	0,05
46	1	1	0	0,96	0,04	1	1	0	1	0	0,9	1	0,1	0,95	0,05
47	1	1	0	0,92	0,08	1	1	0	1	0	1	1	0	0,96	0,04
48	1	1	0	1	0	1	0,91	0,09	0,91	0,09	0,9	1	0,1	0,97	0,07
50	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0,95	0,05	0,95	0,05
51	1	1	0	0,96	0,04	1	1	0	1	0	1	0,6	0,4	0,63	0,37
53	1	1	0	1	0	0	0,445	0,445	0,445	0,445	1	1	0	0,95	0,05
54	1	1	0	0,96	0,04	0,85	1	0,15	1	0,15	1	1	0	0,95	0,05
55	1	1	0	0,95	0,05	0,8	1	0,2	1	0,2	0,8	1	0,2	0,95	0,15
56	1	1	0	0,92	0,08	1	1	0	1	0	1	1	0	0,97	0,03
58	1	1	0	0,94	0,06	1	1	0	1	0	1	0,95	0,05	0,94	0,06
59	1	0,81	0,19	0,8	0,2	1	1	0	1	0	1	1	0	0,95	0,05

ID	PM					MM					AF				
	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.	Aluno	R(96)	Diff.	R(98)	Diff.
1	1	0,92	0,08	0,88	0,12	1	1	0	1	0	0	1	1	0,92	0,92
3	0,87	1	0,13	0,99	0,12	0,75	0,36	0,39	0,36	0,39	0	0,23	0,23	0,23	0,23
4	1	1	0	1	0	1	0,74	0,26	0,74	0,26	0	0,63	0,63	0,63	0,63
5	0,88	1	0,12	0,96	0,08	0	1	1	1	1	0	1	1	0,92	0,92
7	1	1	0	1	0	0,75	0,73	0,02	0,73	0,02	0	0,62	0,62	0,62	0,62
8	0,8	1	0,2	0,99	0,19	1	0,74	0,26	0,74	0,26	0	0,63	0,63	0,64	0,64
9	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0,92	0,08
10	0,85	1	0,15	0,95	0,1	0,75	0,73	0,02	0,73	0,02	0	0,61	0,61	0,61	0,61
11	0,875	1	0,125	0,99	0,115	1	1	0	0,93	0,07	0	0,95	0,95	0,88	0,88
13	1	1	0	0,97	0,03	0	0,73	0,73	0,73	0,73	0	0,63	0,63	0,63	0,63
14	0,875	1	0,125	1	0,125	1	1	0	1	0	0	1	1	0,93	0,93
15	0,77	1	0,23	0,99	0,22	1	1	0	0,84	0,16	0	1	1	0,76	0,76
16	1	1	0	0,96	0,04	1	1	0	1	0	0	0,92	0,92	0,92	0,92
17	0,75	1	0,25	0,95	0,2	1	0,73	0,27	0,73	0,27	0	0,61	0,61	0,61	0,61
18	1	1	0	0,99	0,01	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,63	0,63	0,63	0,63
19	1	1	0	0,95	0,05	1	0,73	0,27	0,73	0,27	0	0,61	0,61	0,61	0,61
20	1	1	0	0,99	0,01	1	1	0	0,85	0,15	0	1	1	0,77	0,77
21	1	1	0	1	0	1	0,74	0,26	0,74	0,26	0	0,64	0,64	0,64	0,64
22	0,85	0,93	0,08	0,93	0,08	0,5	0,74	0,24	0,74	0,24	0	0,61	0,61	0,61	0,61
23	1	1	0	0,99	0,01	0,66	1	0,34	1	0,34	0	1	1	0,92	0,92
26	1	1	0	1	0	1	0,74	0,26	0,74	0,26	0	0,64	0,64	0,64	0,64
27	1	1	0	0,96	0,04	1	0,73	0,27	0,73	0,27	0	0,56	0,56	0,58	0,58
28	1	1	0	0,99	0,01	1	1	0	0,88	0,12	0	1	1	0,68	0,68
29	1	1	0	0,99	0,01	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,64	0,64	0,64	0,64
30	0,88	1	0,12	0,99	0,11	0,66	1	0,34	0,93	0,27	0,5	1	0,5	0,88	0,38
31	1	1	0	0,96	0,04	0,75	1	0,25	1	0,25	0	1	1	0,93	0,93
32	1	1	0	1	0	0,75	0,73	0,02	0,73	0,02	0	0,63	0,63	0,63	0,63
33	1	1	0	0,99	0,01	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,63	0,63	0,63	0,63
34	0,33	1	0,67	0,97	0,64	0	0,73	0,73	0,73	0,73	0	0,59	0,59	0,59	0,59
36	1	1	0	0,99	0,01	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,63	0,63	0,63	0,63
37	1	1	0	0,99	0,01	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,64	0,64	0,64	0,64
38	1	1	0	0,99	0,01	0,66	1	0,34	1	0,34	0	1	1	0,94	0,94
39	1	1	0	0,97	0,03	1	1	0	1	0	0	1	1	0,92	0,92
40	1	1	0	0,97	0,03	0,66	0,74	0,08	0,74	0,08	0	0,63	0,63	0,63	0,63
41	1	0,94	0,06	0,94	0,06	1	0,73	0,27	0,73	0,27	0	0,57	0,57	0,57	0,57
42	0	1	1	0,97	0,97	0	0,73	0,73	0,73	0,73	0	0,61	0,61	0,61	0,61
44	0,88	1	0,12	0,97	0,09	1	0,74	0,26	0,74	0,26	0	0,63	0,63	0,63	0,63
45	1	1	0	0,97	0,03	1	0,74	0,26	0,74	0,26	0	0,64	0,64	0,64	0,64
46	0,875	1	0,125	0,94	0,065	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,63	0,63	0,63	0,63
47	0,85	1	0,15	1	0,15	1	0,73	0,27	0,73	0,27	0	0,62	0,62	0,62	0,62
48	1	1	0	0,96	0,04	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,63	0,63	0,63	0,63
50	1	1	0	1	0	1	0,73	0,27	0,73	0,27	0	0,63	0,63	0,63	0,63
51	0,88	0,59	0,29	0,62	0,26	0,66	0,74	0,08	0,74	0,08	0	0,62	0,62	0,62	0,62
53	0,875	1	0,125	1	0,125	0,5	0,74	0,24	0,74	0,24	0	0,63	0,63	0,63	0,63
54	1	1	0	0,99	0,01	1	1	0	1	0	0	1	1	0,92	0,92
55	1	1	0	0,97	0,03	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,64	0,64	0,64	0,64
56	1	1	0	1	0	0,66	0,73	0,07	0,73	0,07	0	0,62	0,62	0,62	0,62
58	0,875	1	0,125	1	0,125	0,75	0,74	0,01	0,74	0,01	0	0,63	0,63	0,63	0,63
59	1	1	0	0,99	0,01	1	0,74	0,26	0,74	0,26	0	0,64	0,64	0,64	0,64

APÊNDICE H RESULTADOS DOS TESTES DE EQUIVALÊNCIA PARA A REDE SEM LIMIARES

		Diferença \leq mínimo			Diferença \geq máximo			Equivalência
		P-Value			P-Value			
AD	0,2	0,004	48	2,7332	0	48	-13,585	True
	0,15	0,246	48	0,69351	0	48	-11,545	False
	0,1	0,908	48	-1,3462	0	48	-9,5051	False
	0,05	0,999	48	-3,3859	0	48	-7,4654	False
SB	0,1	0,003	48	2,9331	0	48	-5,4416	True
	0,05	0,203	48	0,83941	0,001	48	-3,3479	False
MT	0,15	0,009	48	2,4508	0	48	-5,1339	True
	0,1	0,121	48	1,1867	0	48	-3,8698	False
	0,05	0,531	48	-0,077428	0,006	48	-2,6057	False
DM	0,1	0,004	48	2,8092	0,015	48	-2,2466	True
	0,05	0,064	48	1,5453	0,165	48	-0,98262	False
SP	0,1	0,028	48	1,9609	0,001	48	-3,1662	True
	0,05	0,25	48	0,67911	0,033	48	-1,8844	False
PA	0,1	0,001	48	3,3854	0,002	48	-2,9764	True
	0,05	0,039	48	1,795	0,086	48	-1,3859	False
PM	0,1	0	48	4,5528	0,001	48	-3,1864	True
	0,05	0,006	48	2,618	0,108	48	-1,2516	False
MM	0,1	0,021	48	2,0884	0,004	48	-2,8059	True
	0,05	0,196	48	0,8648	0,06	48	-1,5823	False
AF	0,3	0	48	40,581	1	48	14,668	False
	0,2	0	48	36,262	1	48	18,987	False
	0,15	0	48	34,103	1	48	21,146	False
	0,1	0	48	31,943	1	48	23,306	False
	0,05	0	48	29,784	1	48	25,465	False

APÊNDICE I RESULTADO DOS TESTES DE EQUIVALÊNCIA PARA AS REDES COM LIMIARES

Rede com limiar de 96%		Diferença \leq mínimo			Diferença \geq máximo			Equivalência
		P-Value	df	T-Value	P-Value	df	T-Value	
AD	0,05	0,192	48	0,87732	0	48	-3,5545	False
	0,1	0,002	48	3,0932	0	48	-5,7704	True
SB	0,05	0	48	4,1334	0,586	48	0,21814	False
	0,1	0	48	6,091	0,044	48	-1,7395	True
MT	0,05	0,005	48	2,7198	0,402	48	-0,24836	False
	0,1	0	48	4,2039	0,045	48	-1,7324	True
DM	0,05	0	48	3,6163	0,798	48	0,84323	False
	0,1	0	48	5,0028	0,29	48	-0,54329	False
	0,15	0	48	6,3893	0,03	48	-1,9298	True
SP	0,05	0	48	4,4851	0,888	48	1,2293	False
	0,1	0	48	6,1131	0,346	48	-0,39868	False
	0,15	0	48	7,741	0,024	48	-2,0266	True
PA	0,05	0	48	3,7871	0,725	48	0,60067	False
	0,1	0	48	5,3803	0,163	48	-0,99253	False
	0,15	0	48	6,9735	0,006	48	-2,5857	True
PM	0,05	0	48	4,519	0,77	48	0,74354	False
	0,1	0	48	6,4068	0,129	48	-1,1442	False
	0,15	0	48	8,2945	0,002	48	-3,032	True
MM	0,05	0,042	48	1,7628	0,272	48	-0,6102	False
	0,1	0,002	48	2,9493	0,039	48	-1,7967	True
AF	0,05	0	48	25,24	1	48	21,861	False
	0,1	0	48	26,929	1	48	20,171	False
	0,15	0	48	28,619	1	48	18,482	False
	0,2	0	48	30,309	1	48	16,792	False
	0,3	0	48	33,688	1	48	13,413	False

Rede com limiar de 98%		Diferença \leq mínimo			Diferença \geq máximo			Equivalência
		P-Value	df	T-Value	P-Value	df	T-Value	
AD	0,05	0,999	48	-3,2635	0	48	-7,3222	False
	0,1	0,888	48	-1,2342	0	48	-9,3516	False
	0,15	0,215	48	0,79517	0	48	-11,381	False
	0,2	0,003	48	2,8245	0	48	-13,41	True
SB	0,05	0,083	48	1,4065	0,007	48	-2,5476	False
	0,1	0,001	48	3,3836	0	48	-4,5246	True
MT	0,05	0,334	48	0,43049	0,014	48	-2,2739	False
	0,1	0,04	48	1,7827	0	48	-3,626	True
DM	0,05	0,005	48	2,662	0,502	48	0,0054216	False
	0,1	0	48	3,9903	0,096	48	-1,3229	False
	0,15	0	48	5,3186	0,005	48	-2,6511	True
SP	0,05	0	48	4,0082	0,803	48	0,86073	False
	0,1	0	48	5,5819	0,24	48	-0,71299	False
	0,15	0	48	7,1556	0,013	48	-2,2867	True
PA	0,05	0,004	48	2,7817	0,337	48	-0,42264	False
	0,1	0	48	4,3838	0,024	48	-2,0248	True
PM	0,05	0	48	3,97	0,545	48	0,1141	False
	0,1	0	48	5,898	0,038	48	-1,8139	True
MM	0,05	0,073	48	1,4787	0,191	48	-0,88143	False
	0,1	0,005	48	2,6587	0,022	48	-2,0615	True
AF	0,05	0	48	27,675	1	48	23,797	False
	0,1	0	48	29,613	1	48	21,858	False
	0,15	0	48	31,552	1	48	19,919	False
	0,2	0	48	33,491	1	48	17,98	False
	0,3	0	48	37,369	1	48	14,102	False